Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 528-531

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__528_0>

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Maurice d'Ocagne.

La question 1494, proposée par M. Genty, est un cas particulier (1) du théorème suivant :

Si le point de concours H *des diagonales d'un quadrilatère* ABCD, *inscrit dans une conique, est fixe, et si le côté* AB *tourne autour d'un point fixe* P, *le côte opposé* CD *tourne autour d'un point fixe de la droite* PH.

Voici comment je démontre ce théorème :

Prenons pour origine des coordonnées le point H, pour axe des y la droite HP, et posons $HP = d$.

Soit

$$S = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la conique donnée,

Équation de	AC.........	$\Delta = y - \mu x = 0,$
»	BD.........	$\Delta' = y - \mu' x = 0,$
Équation de	AB.........	$\Gamma = y - d - \nu x = 0,$
»	CD.........	$\Gamma' = y - \delta - \nu' x = 0,$

μ, μ', δ, ν et ν' sont cinq paramètres variables liés au paramètre variable λ par les cinq équations qui proviennent de l'identification des équations

$$S = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\Delta' + \lambda\Gamma\Gamma' = 0.$$

(1) Quand les points P et H sont rejetés à l'infini.

Ces équations sont

$$\frac{\mu\mu' + \lambda\nu\nu'}{A} = \frac{-(\mu + \mu' + \lambda(\nu + \nu')}{B} = \frac{1+\lambda}{C}$$
$$= \frac{\lambda(\delta\nu + d\nu')}{2D} = \frac{-\lambda(d+\delta)}{2E} = \frac{\lambda d\delta}{F}.$$

De la dernière on tire

$$\delta = \frac{-Fd}{2Ed + F};$$

donc δ est constant, ce qui montre que CD coupe l'axe des y, c'est-à-dire PH, en un point fixe; et le théorème est démontré. D'ailleurs, en écrivant la relation précédente

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{d} = -\frac{2E}{F},$$

on voit immédiatement, en appelant Q le point fixe de PH par où passe CD, I et J les points où PH coupe la conique donnée, que le point H a même conjuguée harmonique par rapport aux deux couples de points (I, J) et (P, Q), ce qui détermine géométriquement le point Q.

En transformant par polaires réciproques, on a ce théorème :

Si un quadrilatère ABCD, *circonscrit à une conique, a une diagonale* BD *fixe et si le sommet* A *décrit une droite* Δ, *le sommet opposé* C *décrit une droite* Δ' *coupant* BD *au même point que* Δ.

La droite BD *a même conjuguée harmonique, par rapport aux droites* Δ, Δ' *et par rapport aux tangentes à la conique donnée issues du point de concours de* Δ *et* Δ'.

Extrait d'une Lettre de M. H. Plamenevsky, maître à l'École Reale Temir Chan-Choura (*Caucase*), sur la question **1488**, de *décomposer en deux facteurs du second degré le premier membre de l'équation*

$$(1) \qquad x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

où l'on suppose $A\sqrt{D} = C$.

On peut considérer les racines de cette équation comme les abscisses des points d'intersection de deux coniques représentées par les équations

$$(2) \qquad x^2 - y^2 = r^2,$$

et

$$(3) \qquad y^2 = ax + by + c.$$

L'élimination de y entre les équations (2) et (3) donne

$$(4) \quad x^4 - 2ax^3 + (a^2 - b^2 - 2c)x^2 + 2acx + c^2 + b^2r^2 = 0.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les équations (4) et (1), on trouve

$$a = \frac{A}{2},\quad c = -\frac{C}{A},\quad b = \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}},\quad r^2 = \frac{D - \dfrac{C^2}{A^2}}{\dfrac{A^2}{4} - B + \dfrac{2C}{A}}.$$

Mais, par hypothèse, $A\sqrt{D} = C$; il en résulte

$$D - \frac{C^2}{A^2} = 0,$$

et par suite

$$r^2 = 0,\quad x^2 - y^2 = 0,\quad y = \pm x.$$

En remplaçant, dans l'équation (3), a, b, y, c par ces expressions, il vient

$$x^2 = -\frac{A}{2}x \pm x\sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}} - \frac{C}{A}$$

ou

$$x^2 = \left(-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}}\right)x - \frac{C}{A}.$$

Ces valeurs de x, vérifiant l'équation (4), vérifient de même l'équation proposée (1) : donc on a identiquement

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = \left[x^2 + x\left(\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}}\right) + \frac{C}{A}\right] \times \left[x^2 + x\left(\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B + \frac{2C}{A}}\right) + \frac{C}{A}\right].$$

On voit que, dans le cas particulier où $A\sqrt{D} = C$, les racines de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

sont les abscisses des points d'intersection d'une parabole et de deux droites représentées par les équations $x + y = 0$, $x - y = 0$.