MAURICE D'OCAGNE

Étude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles dans le plan : coordonnées parallèles et coordonnées axiales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 516-522

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__516_1>

ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES

(voir p. 456);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

31. *Équation réduite.* — Prenons la forme réduite de l'équation des coniques

$$uv = K.$$

Nous avons vu qu'elle représente une conique touchant les axes de coordonnées aux origines.

Cherchons les tangentes parallèles à l'axe des origines, en faisant $u = v$; cela donne

$$u = v = \pm\sqrt{K}.$$

Si donc $K > 0$, on a une ellipse.

Si $K < 0$, une hyperbole.

(¹) Sauf une légère inadvertance.

(²) *Nouvelle Correspondance mathematique,* t. II, p. 106.

En effet, dans ce cas (n° 25),

$$\Gamma\Delta = -\frac{K}{4}.$$

K est le carré du demi-diamètre b conjugué de l'axe des origines, ou, ce qui revient au même, du demi-diamètre parallèle aux axes de coordonnées.

L'équation réduite des coniques exprime, par suite, la propriété suivante :

Dans une conique, le produit des segments déterminés par une tangente quelconque sur deux tangentes parallèles entre elles (à partir de leurs points de contact) est constant et égal au carré du demi-diamètre parallèle à ces deux tangentes.

32. Le centre est déterminé (n° 26) par

$$u + v = 0,$$

milieu de la distance des origines, et les asymptotes par l'équation précédente jointe à celle de la courbe

$$uv = b^2,$$

d'où l'on tire, pour ces asymptotes,

$$u = bi, \quad v = -bi$$

et

$$u = -bi, \quad v = bi.$$

33. La relation qui lie deux directions conjuguées (n° 27) est dans ce cas

$$\frac{kk_1}{4} + b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad kk_1 = -4b^2.$$

Ce résultat peut s'interpréter géométriquement sans difficulté et conduit à un théorème connu.

34. Par le point dont l'équation est

$$u = mv + n,$$

menons les deux tangentes à la conique. Les v de ces tangentes seront donnés par l'équation

$$mv^2 + nv - b^2 = 0.$$

Pour que ces tangentes soient confondues, il faut que

$$n^2 + 4mb^2 = 0.$$

Telle est donc la relation qui doit être remplie pour que le point soit sur la courbe. L'équation de tout point de la conique sera donc de la forme

$$u = mv \pm 2b\sqrt{-m},$$

et l'on sait que m est le rapport des distances à A et à B du pied de la parallèle aux axes de coordonnées, menée par le point considéré.

L'équation en v écrite plus haut montre que, si m est constant et n variable, le produit des racines est constant; or, m étant constant, on voit que le point se meut sur une parallèle aux axes de coordonnées. De là ce théorème :

C *étant une conique,* D *une droite quelconque, on mène à* C *une tangente* Δ *parallèle à* D, *et dont le point de contact est* A. *Les tangentes à* C, *issues d'un point quelconque de* D, *déterminent sur* Δ, *à partir de* A, *deux segments dont le produit est constant.*

Détermination des foyers.

35. Nous avons vu (n° 3) que l'angle d'une droite avec l'axe des origines est donné par

$$\tan \alpha = \frac{(v-u)\sin\theta}{d + (v-u)\cos\theta};$$

il s'ensuit, en posant $\tang\alpha = m$,

$$(a) \qquad v = u + \frac{md}{\sin\theta - m\cos\theta}.$$

Soient alors donnés un point

$$(b) \qquad u + pv + q = 0,$$

et une conique

$$(c) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

On aura les m des tangentes menées de ce point à cette conique, en éliminant u et v entre les équations (a), (b), (c), ce qui n'offre pas de difficulté. On trouve ainsi

$$Pm^2 + Qm + R = 0,$$

P, Q, R étant des polynômes du second degré en p et q.

Si le point représenté par l'équation (b) est un foyer, les m des tangentes issues de ce point ont pour valeurs $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$; par suite, l'équation précédente doit être identique à

$$m^2 + 1 = 0,$$

ce qui exige que

$$Q = 0 \quad \text{et} \quad P = R.$$

On a ainsi deux équations du second degré en p et q qui font connaître les valeurs de ces paramètres, relatives aux foyers de la conique.

V. — Exemples d'application des coordonnées parallèles.

36. *Une conique variable est constamment tangente à deux droites parallèles fixes et touche une conique fixe toujours au même point, trouver le lieu du point*

de rencontre des tangentes communes à ces deux coniques.

Prenons pour origines A le point de contact fixe des deux coniques, et pour axe AB la tangente en ce point, pour axe Au la droite menée par ce point parallèlement aux droites fixes données, et pour axe Bv une parallèle quelconque à cette droite.

Équation de la conique fixe

$$(\alpha) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du = 0;$$

équation de la conique variable

$$(\beta) \qquad A'u^2 + 2B'uv + C'v^2 + 2D'u = 0,$$

où A′, B′, C′ sont constants, d'après le corollaire qui termine le n° 21, puisque la conique variable a toujours les mêmes tangentes parallèles aux axes.

Multiplions (α) par C′, (β) par C et retranchons, il vient

$$u[(AC' - A'C)u + 2(BC' - B'C)v + 2(DC' - D'C)] = 0,$$

équation qui donne les pôles communs aux deux coniques.

$u = 0$ est leur point de contact fixe.

$$(AC' - A'C)u + 2(BC' - B'C)v + 2(DC' - D'C) = 0$$

est le point dont on cherche le lieu; or le rapport des distances de ce point aux axes de coordonnées, égal à $-\frac{2(BC' - B'C)}{AC' - A'C}$, étant indépendant du paramètre variable qui est D′, ce point reste sur une droite parallèle aux axes de coordonnées : tel est donc le lieu cherché.

37. Nous allons montrer maintenant comment les coordonnées tangentielles permettent de déduire corrélativement des théorèmes nouveaux de ceux qui sont

établis au moyen des coordonnées cartésiennes [1]; deux questions seront corrélatives lorsqu'elles reposeront sur les mêmes équations en x et y d'une part, en u et v de l'autre, et que ces équations seront soumises aux mêmes opérations; seules les interprétations géométriques différeront. En voici des exemples :

En coordonnées cartésiennes, on a :

Si une droite se déplace en restant parallèle à elle-même, elle coupe constamment une courbe fixe du $m^{\text{ième}}$ ordre en m points dont le centre des moyennes distances décrit une droite.

Or, à des droites parallèles, en coordonnées cartésiennes, correspondent, en coordonnées parallèles, des points situés sur une parallèle aux axes de coordonnées; au centre des moyennes distances, correspond la droite moyenne relative à la direction des axes de coordonnées; comme ces axes sont d'ailleurs quelconques, nous aurons, en coordonnées parallèles, le théorème suivant :

Si un point décrit une droite D, *la droite moyenne, relative à la direction de* D, *des m tangentes que l'on peut mener de ce point à une courbe fixe de la $m^{\text{ième}}$ classe, passe par un point fixe.*

En coordonnées cartésiennes, on a encore ce théorème :

Le centre des moyennes distances des $m(m-1)$ points de contact des tangentes à une courbe fixe d'ordre m, parallèles à une direction donnée, est fixe lorsqu'on fait varier la direction des tangentes.

---

[1] Nous reviendrons sur ce sujet dans les paragraphes IX et X.

Par transformation corrélative nous aurons, en coordonnées parallèles, le théorème suivant :

Une droite D *se déplaçant parallèlement à elle-même coupe constamment une courbe fixe de la classe* m *en* $m(m-1)$ *points; la droite moyenne, relative à la direction de* D, *des tangentes en tous ces points, est fixe.*

(*A suivre.*)