NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Sur une communication de M. Tchébychew au congrès de Clermont-Ferrand

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 513-516

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__513_1>

SUR UNE COMMUNICATION DE M. TCHÉBYCHEW AU CONGRÈS DE CLERMONT-FERRAND (¹);

PAR M. E. CESARO.

I. Ayant posé, pour abréger,

$$w_x = u_{k(x-1)+1} + u_{k(x-1)+2} + u_{k(x-1)+3} + \ldots + u_{k(x-1)+k-1},$$

(¹) 21 août 1876.

considérons la série

$$U_{kn} = w_1 - (k-1)u_k + w_2 - (k-1)u_{2k} + \ldots + w_n - (k-1)u_{nk},$$

supposée convergente. On peut écrire

$$U_{kn} = (u_1 + u_2 + \ldots + u_{kn}) - k(u_k + u_{2k} + \ldots + u_{nk});$$

par conséquent, si l'on fait

$$v_x = ku_{kx} - u_x,$$

puis

$$V_x = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_x,$$

on a

$$U_{kn} + V_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{kn}.$$

Si n augmente indéfiniment,

$$U + V = \lim[u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{kn}].$$

II. $[z]$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans z, soit

$$u_x = \frac{[ax]}{x^2}$$

et, par suite,

$$v_x = \frac{[kax] - k[ax]}{kx^2}.$$

A cause de

$$kax - 1 < [kax] \overline{\gtrless} kax, \quad kax - k < k[ax] \overline{\gtrless} kax,$$

on a

$$-1 < [kax] - k[ax] < k.$$

La quantité $[kax] - k[ax]$ a donc une des valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, k-1$. Il en résulte qu'elle est égale au reste de la division de $[kax]$ par k. Par conséquent, $\rho(p, q)$ désignant le reste de la division de $[p]$ par q, on a

$$v_x = \frac{\rho(kax, k)}{kx^2}.$$

Cela posé, on peut écrire

$$u_x = \frac{a}{x} - \frac{\theta}{x^2},$$

θ étant une fraction proprement dite. Il en résulte

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{kn}$$
$$= a(\mathrm{H}_{kn} - \mathrm{H}_n) - \Theta\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(kn)^2}\right],$$

Θ étant, comme θ, une fraction proprement dite, et H_x représentant la somme des x premiers termes de la série harmonique. Pour n infini :

$$\lim[u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{kn}] = alk.$$

De tout cela résulte que, si l'on pose

$$\mathrm{U} = \frac{[a]}{1} + \frac{[2a]}{4} + \ldots - (k-1)\frac{[ka]}{k^2} + \frac{[(k+1)a]}{(k+1)^2} + \frac{[(k+2)a]}{(k+2)^2} + \ldots,$$
$$\mathrm{V} = \frac{1}{k}\left[\frac{\rho(ka, k)}{1} + \frac{\rho(2ka, k)}{4} + \frac{\rho(3ka, k)}{9} + \ldots\right],$$

on a

$$\mathrm{U} + \mathrm{V} = alk.$$

III. Soit, par exemple, $k = 2$. La fonction $\rho(z, 2)$ égale 0 ou 1, suivant que $[z]$ est pair ou impair. On peut donc écrire

$$\rho(z, 2) = \frac{1 - (-1)^{[z]}}{2}$$

Conséquemment. si l'on pose

$$\mathrm{U} = \frac{[a]}{1} - \frac{[2a]}{4} + \frac{[3a]}{9} - \frac{[4a]}{16} + \ldots,$$
$$\mathrm{W} = \frac{(-1)^{[2a]}}{1} + \frac{(-1)^{[4a]}}{4} + \frac{(-1)^{[6a]}}{9} + \ldots,$$

on a

$$\mathrm{U} - \frac{1}{4}\mathrm{W} = al2 - \frac{\pi^2}{24}.$$

C'est ([1]) la relation que M. Tchébychew a déduite d'une identité de M. Catalan ([2]). Elle montre, par exemple, que l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \pm \frac{[ix]}{i^2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^{[2ix]}}{i^2}$$

admet la racine unique

$$x = \frac{\pi^2}{24\, l\, 2} = 0,59308\ldots.$$