NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 483-495

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__483_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1450
(voir 3e série, t. II, p. 288);

PAR M. MORET-BLANC.

1° *La somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres premiers à* N, *et non supérieurs à ce nombre, est divisible par* N, *si m est impair;*

2° *La somme des produits m à m des nombres premiers à* N, *et non supérieurs à ce nombre, est divisible par* N, *si m est impair.* (E. CESARO.)

Les nombres premiers à N, et non supérieurs à ce nombre, peuvent être associés deux à deux : a et $N - a$, b et $N - b$, ... Ils sont en nombre pair, car on ne peut avoir $N - a = a$, ce qui donnerait $N = 2a$; a serait un diviseur de N, ce qui est contraire à l'hypothèse. On suppose $N > 2$.

1° m étant impair, la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de deux nombres associés $a^m + (N - a)^m$ est évidemment divisible par N, car les termes $a^m - a^m$ se détruisent, et tous les autres renferment le facteur N : donc la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de tous les nombres premiers à N, et non supérieurs à ce nombre, est divisible par N.

2° A tout produit de m de ces nombres en correspond un autre qui n'en diffère qu'en ce que l'un des nombres y est remplacé par son associé; leur somme est de la forme

$$Aa + A(N - a) = AN, \quad \text{multiple de N.}$$

Toutes ces sommes partielles étant divisibles par N, leur somme, c'est-à-dire celle de tous les produits m à m des nombres premiers à N, et non supérieurs à ce nombre, est divisible par N.

Note. — La même question a été résolue par M. Louis M.

Question 1460

(voir 3e série, t. II, p. 382);

PAR M. MORET-BLANC.

Soient G *le centre de gravité d'un tétraèdre* ABCD; O_1, O_2, O_3, O_4 *les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres* GBCD, GACD, GABD, GABC *respectivement. Le centre de gravité du tétraèdre* $O_1O_2O_3O_4$ *est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre donné.*

Même théorème pour le triangle et les cercles circonscrits. (GENTY.)

Prenons le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD pour origine des coordonnées rectangulaires, et soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 les coordonnées des sommets A, B, C, D; ξ, η, ζ celles du point G; r le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, et d la distance OG.

Le point O_1 sera à l'intersection des plans perpendiculaires sur les milieux de GB, GC, GD, et aussi sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la face BCD.

Les équations de trois plans sont

$$(x_2-\xi)\left(x-\frac{x_2+\xi}{2}\right)+(y_2-\eta)\left(y-\frac{y_2+\eta}{2}\right)+(z_2-\zeta)\left(z-\frac{z_2+\zeta}{2}\right)=0, \quad \ldots$$

ou

$$(x_2-\xi)x+(y_2-\eta)y+(z_2-\zeta)z=\frac{r^2-d^2}{2},$$

$$(x_3-\xi)x+(y_3-\eta)y+(z_3-\zeta)z=\frac{r^2-d^2}{2},$$

$$(x_4-\xi)x+(y_4-\eta)y+(z_4-\zeta)z=\frac{r^2-d^2}{2}.$$

En ajoutant ces équations membre à membre, pour plus de symétrie, on a l'équation

$$(\xi-x_1)x+(\eta-y_1)y+(\zeta-z_1)z=\frac{3(r^2-d^2)}{2},$$

qui, avec celles de la perpendiculaire abaissée du point O sur la face BCD, déterminera le point O_1.

La direction de Ox étant arbitraire, prenons la perpendiculaire au plan BCD, alors on aura, pour le point O_1,

$$y=0,\quad z=0,$$

$$x=OO_1=\frac{3(r^2-d^2)}{2(\xi_1-x_1)}=\frac{2(r^2-d^2)}{\frac{4}{3}(\xi-x_1)}=\frac{2(r^2-d^2)}{h_1},$$

en désignant par h_1 la hauteur du tétraèdre correspondant à la base BCD. Si l'on nomme B_1 cette face et V le volume du tétraèdre, on a

$$h_1=\frac{3V}{B_1}$$

et

$$OO_1=\frac{2(r^2-d^2)}{3V}B_1,$$

de même

$$OO_2=\frac{2(r^2-d^2)}{3V}B_2,$$

$$OO_3=\frac{2(r^2-d^2)}{3V}B_3,\quad OO_4=\frac{2(r^2-d^2)}{3V}B_4.$$

Les longueurs OO_1, OO_2, OO_3, OO_4 sont donc proportionnelles aux faces du tétraèdre auxquelles elles sont perpendiculaires.

Or, si l'on projette sur un plan quelconque les faces d'un tétraèdre, les projections étant affectées du même signe ou de signes différents suivant qu'elles sont ou non du même côté de la face projetée que le sommet qui lui est opposé, la somme algébrique des projections est nulle; il en sera de même en projetant sur un axe les perpendiculaires à ces faces, proportionnelles à leurs aires.

Il résulte de là que quatre forces, représentées par OO_1, OO_2, OO_3, OO_4, se font équilibre, et, par suite, d'après un théorème connu, que le point O est le centre de gravité du tétraèdre $O_1 O_2 O_3 O_4$.

Un calcul et un raisonnement tout semblables appliqués à un triangle ABC prouvent que le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les centres des cercles qui passent par deux sommets du triangle ABC et par son centre de gravité est le centre du cercle circonscrit à ABC.

De ce qui précède résultent aussi les théorèmes suivants :

I. *Si deux tétraèdres sont tels que les médianes* [1] *du premier soient perpendiculaires aux faces du second, réciproquement les médianes du second seront perpendiculaires aux faces du premier.*

II. *Si, à partir du centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, on porte sur les perpendiculaires aux faces des longueurs proportionnelles à leurs aires, les quatre extrémités sont les sommets d'un second tétraèdre; ce tétraèdre et le premier jouissent de la propriété énoncée dans le théorème précédent; de plus, le centre de gra-*

---

[1] J'appelle *médiane d'un tétraèdre* la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée.

vité du second est le centre de la sphère circonscrite au premier.

Théorèmes analogues pour le triangle.

Question 1464

(voir 3e série, t. II, p. 383);

PAR M. LÉON CLÉMENT,
Du lycée de Rouen (Mathématiques spéciales).

L'énoncé doit être rectifié comme il suit :

On donne deux paraboles $y^2 = 2c(x \pm c)$; *une tangente à l'une de ces paraboles rencontre l'autre aux points* P, Q; *sur* PQ, *comme diamètre, on décrit un cercle qui rencontre la seconde parabole en deux nouveaux points* R, S : *prouver que la droite* RS *est tangente à la seconde parabole.*

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point $x = c$, $y = 0$. Les équations des paraboles deviendront

$$y^2 = 2cx \tag{A}$$

et

$$y^2 = 2cx + 4c^2. \tag{B}$$

Soient $y - \alpha x - \frac{c}{2\alpha} = 0$ l'équation de la tangente PQ à la parabole (A), et $y + \alpha x + \beta = 0$ l'équation de la droite RS.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection P, Q, R, S des droites PQ, RS, avec la parabole (B), est

$$\lambda(y^2 - 2cx - 4c^2) + \left(y - \alpha x - \frac{c}{2\alpha}\right)(y + \alpha x + \beta) = 0$$

ou

$$-\alpha^2 x^2 + \lambda + 1)y^2$$
$$-\left(2c\lambda + \frac{c}{2} + \alpha\beta\right)x - \left(\frac{c}{2\alpha} - \beta\right)y + \frac{\beta c}{2\alpha} - 4\lambda c^2 = 0.$$

Pour que cette dernière équation représente un cercle, il faut que $\lambda = -(1 + \alpha^2)$.

L'équation du cercle devient alors

$$\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \left(\alpha\beta - \frac{3c}{2} - 2c\alpha^2\right)x$$
$$-\left(\frac{c}{2\alpha} - \beta\right)y + \frac{\beta c}{2\alpha} - 4c^2(1 + \alpha^2) = 0.$$

Exprimons que le centre de ce cercle est sur la droite PQ.

Les coordonnées de ce centre sont données par les équations

$$2\alpha^2 x + \alpha\beta - \frac{3c}{2} - 2c\alpha^2 = 0,$$

et

$$2\alpha^2 y + \frac{c}{2\alpha} - \beta = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$2\alpha y + \frac{c}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Il faut éliminer x et y entre ces deux équations et l'équation de la droite PQ, qui est $y - \alpha x = \frac{c}{2\alpha}$.

Les équations du centre donnent, en les retranchant membre à membre,

$$2\alpha(y - \alpha x) + \frac{c}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} - \alpha\beta + \frac{3c}{2} + 2c\alpha^2 = 0;$$

d'où, en ayant égard à l'équation de PQ,

$$c + \frac{c}{2\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} - \alpha\beta + \frac{3c}{2} + 2c\alpha^2 = 0,$$

ce qui revient à

$$4c^4 + c\alpha^2 - 2\alpha^2\beta + 4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta = 0$$

ou

$$\alpha^2(4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta) + 4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta = 0,$$
$$(\alpha^2 + 1)(4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta) = 0,$$
$$4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta = 0.$$

Or cette dernière équation exprime précisément que la droite RS, $y + \alpha x + \beta = 0$, est tangente à la parabole (B).

Le cercle décrit sur PQ comme diamètre est donc tangent à la parabole (B) (¹).

(¹) Un calcul assez simple détermine avec précision le point de contact de ces deux courbes. Il est d'abord évident que les axes des paraboles (A), (B) coïncident avec l'axe des x, et que, par suite, toute droite parallèle à l'axe des x est un diamètre commun aux deux courbes. Il résulte aussi des équations de (A) et (B) que la partie d'un diamètre comprise entre les deux paraboles est constamment égale à leur paramètre $2c$.

Cela admis, soient a le point de contact de la tangente PQ à la parabole (A), et ab une parallèle à l'axe des x, rencontrant la parabole (B) au point b. La tangente menée à (B), au point b, sera parallèle à PQ, parce que les ordonnées des points b, a sont égales entre elles, et que les deux paraboles ont le même paramètre $2c$. Donc le diamètre ba de (B) divise en deux parties égales la corde PQ de (B); par conséquent, le point a est le centre du cercle décrit sur PQ comme diamètre.

En nommant α le coefficient angulaire de la tangente PQ, l'ordonnée du point de contact a est $\frac{c}{\alpha}$, et l'abscisse $\frac{c}{2\alpha^2}$: ce sont les coordonnées du centre du cercle considéré; la valeur de son rayon $\frac{PQ}{2}$ ou aP résulte du calcul suivant.

L'équation de la parabole (A), rapportée à son diamètre ba et à sa tangente PQ, est $y'^2 = 2\left(\frac{c}{\alpha^2} + c\right)x'$.

Pour $x' = 2c$, $y'^2 = \frac{4c^2}{\alpha^2} + 4c^2$. Or $y' = aP$, parce que $2c = ba$; donc le carré du rayon du cercle est égal à $\frac{4c^2}{\alpha^2} + 4c^2$.

Actuellement soit b' le point symétrique de b, par rapport à

Question 1487
(voir 3e série, t. III, p. 160);

PAR M. J. RICHARD,
Élève au lycée Saint-Louis.

A un triangle ABC *on circonscrit une conique de centre* (x, y, z). *On sait que les droites qui joignent chaque sommet du triangle au pôle du côté opposé se coupent en un même point* (x', y', z'). *Démontrer qu'il y a réciprocité entre les points* (x, y, z), (x', y', z'), *et que cette réciprocité est définie par les relations*

$$\frac{yz'+zy'}{a} = \frac{zx'+xz'}{b} = \frac{xy'+yx'}{c},$$

où a, b, c *sont les côtés de* ABC. (E. CESARO.)

En désignant par x, y, z les distances d'un point du plan du triangle aux côtés BC, AC, AB, l'équation d'une conique circonscrite au triangle est

$$(1) \qquad \lambda yz + \mu zx + \nu xy = 0,$$

---

l'axe des x. Le triangle $b'ba$ rectangle en b donne $\overline{ab'}^2 = \overline{bb'}^2 + \overline{ba}^2$. Mais, en valeur absolue, bb', qui est le double de l'ordonnée de b, est égal à $\frac{2c}{\alpha}$, et $ba = 2c$; il s'ensuit $\overline{ab'}^2 = \frac{4c^2}{\alpha^2} + 4c^2 = \overline{a\text{P}}^2$, d'où $ab' = a\text{P}$. Ainsi, le point b' appartient au cercle dont PQ est diamètre.

De plus, la droite ab' est normale à la parabole (B) au point b'. Car, soient g et h les pieds des ordonnées de a et b', et m le point d'intersection de ab' et de l'axe des x; on a évidemment

$$mh = mg = \frac{hg}{2} = \frac{ba}{2} = c,$$

c'est-à-dire que la projection de mb' sur l'axe de la parabole (B) est égale à la moitié du paramètre de (B). Donc mb' est normale à (B). Par conséquent, le cercle décrit sur PQ comme diamètre est tangent à la parabole (B), au point b'. G.

et la droite de l'infini a pour équation

$$(2) \qquad ax + by + cz = 0.$$

Nous exprimerons qu'un point (x, y, z) est centre de la conique en écrivant que la polaire de ce point coïncide avec la droite de l'infini, ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{\nu y + \mu z}{a} = \frac{\lambda z + \nu x}{b} = \frac{\mu x + \lambda y}{c}.$$

D'autre part, cherchons l'équation de la droite qui joint le sommet A du triangle au pôle du côté opposé BC. Le pôle de ce côté est, sur chacune des tangentes à la conique, en B et C, c'est-à-dire sur les droites représentées par les équations

$$\frac{z}{\nu} + \frac{x}{\lambda} = 0, \quad \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 0.$$

Par conséquent, ses coordonnées x', y', z' vérifient l'équation $\frac{y}{\mu} - \frac{z}{\nu} = 0$, qu'on obtient en retranchant, membre à membre, les deux équations précédentes.

Les coordonnées x', y', z' du point de concours des droites qui joignent chacun des sommets du triangle au pôle du côté opposé vérifient donc les trois équations

$$\frac{y'}{\mu} - \frac{z'}{\nu} = 0, \quad \frac{z'}{\nu} - \frac{x'}{\lambda} = 0, \quad \frac{x'}{\lambda} - \frac{y'}{\mu} = 0,$$

ce qui montre que x', y', z' sont proportionnelles à λ, μ, ν.

En remplaçant λ, μ, ν par x', y', z' dans les équations (3) qui sont homogènes, on a

$$\frac{yz' + zy'}{a} = \frac{zx' + xz'}{b} = \frac{xy' + yx'}{c}.$$

Ce sont précisément les relations qu'il fallait démontrer.

Ces relations ne changent pas lorsqu'on y permute les coordonnées x', y', z' avec les coordonnées x, y, z. Il y a donc réciprocité entre les deux points.

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart et Moret-Blanc.

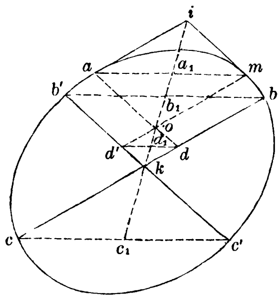
Question 1494

(voir 3e série, t. III, p. 352);

Par M. N. GOFFART.

Soient a et m deux points quelconques d'une conique, b et c les extrémités d'une corde parallèle à la tangente en a. Menons par les points b et c des parallèles à la droite am, qui rencontre la conique aux points b' et c' respectivement; la droite b'c' est parallèle à la tangente au point m. (Genty.)

Soient d et d' les milieux de bc et $b'c'$. Les droites am, bb', cc', dd' sont parallèles, et leurs milieux a_1, b_1,



c_1, d_1 sont situés sur le diamètre conjugué à la direction am, lequel passe au point de concours k des diagonales du trapèze $bb'cc'$ et au pôle i de am.

Or, ad, étant le diamètre conjugué à la direction ai, coupe ik au centre o de la conique (ou lui est parallèle, dans le cas de la parabole). Mais il résulte de la similitude des triangles dod_1 et aoa_1 (angle $d = a$, $d_1 = a_1$) que les triangles d_1od' et a_1om sont aussi semblables

$$\left(d_1 = a_1,\quad \frac{od_1}{oa_1} = \frac{d_1d'}{a_1m} = \frac{dd_1}{aa_1}\right),$$

et par suite que $d'om$ est une ligne droite; c'est donc le diamètre conjugué à la direction $b'c'$ et par suite mi est parallèle à $b'c'$.

Note. — M. Victor de Strékalof, à Saint-Pétersbourg, et MM. Pisani et Moret-Blanc ont donné, de même, une solution géométrique de la question proposée; MM. L. Amouroux, du lycée de Grenoble, et J. Richard l'ont résolue par les formules de la Géométrie analytique.

Question 1499

(voir 3e série, t. III, p. 400);

PAR M. J. RICHARD.

On donne l'arête de base et la hauteur d'une pyramide régulière dont la base est un carré. Trouver l'angle compris entre deux faces latérales.

(GENEIX-MARTIN.)

Soient SABCD la pyramide, h la hauteur SO, a l'arête de la base [1].

Le plan SBD étant perpendiculaire à la diagonale AC, on peut mener par AC un plan perpendiculaire à SB. Soit M le point où ce plan rencontre SB. Il s'agit d'évaluer l'angle AMC.

On a d'abord

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

et

$$\mathrm{SB} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}.$$

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

Dans le triangle rectangle SOB,

$$OM \times SB = SO \times OB$$

ou

$$OM \times \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2} = \frac{ah}{2};$$

d'où

$$OM = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}.$$

Or

$$\tang \tfrac{1}{2} AMC = \tang AMO = \frac{AO}{MO}$$

$$= \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+2h^2}}{ah} = \frac{\sqrt{2a^2+4h^2}}{2h}.$$

Par conséquent, la tangente de la moitié de l'angle cherché est égale à $\frac{\sqrt{2a^2+4h^2}}{2h}$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Goffart.

Question 1501

(voir 3ᵉ série, t. III, p. 400);

PAR M. MORET-BLANC.

Par le sommet A *d'un triangle* ABC, *on mène des perpendiculaires aux côtés* AB, AC, *qui rencontrent en* D *et* E *la circonférence circonscrite au triangle. Démontrer que le quadrilatère* ADBE (*ou* ADCE) *est équivalent au triangle.* (B. REYNOLDS, M. A.)

On a, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle,

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AD}{\cos C} = \frac{AE}{\cos B} = 2R,$$

$$\begin{aligned}
\text{surf. } ABC &= \tfrac{1}{2} AB.AC \sin A &&= 2R^2 \sin A \sin B \sin C,\\
\text{surf. } ABD &= \tfrac{1}{2} AB.AD &&= 2R^2 \sin C \cos C,\\
\text{surf. } ABE &= \tfrac{1}{2} AB.AE \cos A &&= 2R^2 \sin C \cos A \cos B,
\end{aligned}$$

d'où

$$\text{surf. ADBE} = 2R^2 \sin C(\cos C + \cos A \cos B);$$

mais

$$\cos C = -\cos(A + B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B,$$

donc

$$\text{surf. ADBE} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \text{surf. ABC}.$$

On trouve de même

$$\text{surf. ADCE} = \text{surf. ABC}.$$

En projetant la figure sur un plan quelconque, on a ce théorème plus général :

Par le sommet A *d'un triangle* ABC *inscrit dans une ellipse, on mène les cordes* AD, AE *respectivement supplémentaires de* AB *et* AC. *Le quadrilatère* ADBE (*ou* ADCE) *est équivalent au triangle.*

Nota. — La même question a été résolue par M. Goffart.