Nouvelles annales de mathématiques

E. Cesàro

Quelques propriétés élémentaires des groupes plusieurs fois transitifs

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 471-475
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__471_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES GROUPES PLUSIEURS FOIS TRANSITIFS;

PAR M. E. CESARO.

1. Soit G un groupe de substitutions, k fois transitif, de degré n. Soient

(1) $$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_m$$

toutes les substitutions de G, pour lesquelles k éléments donnés $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}$ restent fixes. En vertu de sa transitivité, G contient certainement une substitution σ_α, qui fait succéder, aux k éléments donnés, k éléments quelconques $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_k}$, choisis parmi les n éléments que l'on considère. Toutes les substitutions

(2) $$s_1\sigma_\alpha,\ s_2\sigma_\alpha,\ s_3\sigma_\alpha,\ \ldots,\ s_m\sigma_\alpha$$

ont évidemment le même effet. De plus, si τ est une quelconque des substitutions qui font succéder les éléments x_α aux éléments x_i, il est clair que $\tau\sigma_\alpha^{-1}$ ne déplace pas les éléments x_i, et appartient, par conséquent, à la série (1). Or, de $\tau\sigma_\alpha^{-1} = s_\lambda$ on tire $\tau = s_\lambda\sigma_\alpha$. Donc, la ligne (2) contient *toutes* les substitutions qui changent les éléments x_i en éléments x_α. Observons, maintenant, que $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_k$ est un arrangement de k indices, choisis parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. Il y a $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ de tels arrangements. Pour chacun d'eux, nous pouvons toujours trouver une substitution σ, et former, comme précédemment, une ligne analogue à (2). On construit ainsi un tableau de $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ lignes, dont chacune contient m substitutions. Ce tableau renferme, sans omission, ni répétition, les substitutions de G. *Sans omission,* parce que, étant donnée une substitution de G, il suffit d'observer quels éléments elle fait succéder aux k éléments x_i, et de prendre, dans le tableau, la ligne correspondant à l'arrangement des indices de ces éléments. D'après ce qui a été dit, cette ligne contient nécessairement la substitution considérée. *Sans répétition,* parce que deux substitutions $s_\lambda \sigma$ et $s_\mu \sigma$, d'une même ligne, ne peuvent coïncider, sans que l'on ait $s_\lambda = s_\mu$; et deux substitutions, appartenant à deux lignes différentes, ne peuvent qu'être différentes, puisque, aux mêmes éléments x_i, elles font succéder des éléments différents, ou différemment disposés. Par conséquent, l'ordre r du groupe G est

$$m.n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Si l'on observe, en outre, que les substitutions (1) forment un groupe G_1, sous-groupe de G, qui a la propriété de ne pas déplacer les éléments x_i, on peut énoncer la proposition suivante [1] :

Théorème. — *L'ordre d'un groupe* G, *transitif k fois, de degré n, est divisible par*

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Le quotient est l'ordre des sous-groupes de G, *qui ne contiennent pas k éléments donnés.*

2. En examinant la série des substitutions $\sigma_\alpha^{-1} s_\lambda \sigma_\alpha$ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m$), on voit immédiatement que le sous-groupe G_α, qui ne contient pas les k éléments x_α, est le transformé de G_1, moyennant σ_α. Il est donc semblable à G_1. Conséquemment, si ν_q est le nombre des substitutions de G_1, qui déplacent précisément q élé-

(1) Netto, *Substitutionentheorie*, p. 74, *Lehrsatz* I

ments, ce nombre a la même valeur pour les autres sous-groupes. En outre, il est clair que, identiquement,

$$(3) \qquad m = \nu_{n-k} + \nu_{n-k-1} + \nu_{n-k-2} + \ldots + \nu_0,$$

où $\nu_0 = 1$. De même, si N_q est le nombre des substitutions de G, qui déplacent précisément q éléments, on a

$$(4) \qquad r = N_n + N_{n-1} + N_{n-2} + \ldots + N_0,$$

avec $N_0 = 1$. Cela posé, examinons l'ensemble des substitutions de tous les sous-groupes $G_1, G_2, \ldots, G_\alpha, \ldots$, dont le nombre est égal à celui des manières de choisir k éléments parmi les n donnés, c'est-à-dire à $C_{n,k}$. Parmi ces substitutions sont contenues sans omission, mais avec des répétitions possibles, les substitutions de G, qui ne déplacent pas plus de $n-k$ éléments. Si $q \overline{\gtrless} k$, chaque sous-groupe contient ν_{n-q} substitutions, qui déplacent précisément $n-q$ éléments, et le nombre total de ces substitutions, dans le groupe G, serait $C_{n,k}\nu_{n-q}$, si chacune d'elles n'était pas comptée en autant de sous-groupes qu'il y a de manières de choisir, parmi les q élements qui doivent rester fixes, les k éléments, dont l'absence caractérise un sous-groupe. Donc

$$\begin{aligned} N_{n-q} &= \frac{C_{n,k}}{C_{q,k}} \nu_{n-q} \\ &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \frac{\nu_{n-q}}{q(q-1)(q-2)\ldots(q-k+1)} \quad (q \overline{\gtrless} k) \end{aligned}$$

Substituant dans (4), et observant que

$$r = m.n(n-1)(n-2) \ldots (n-k-1),$$

on trouve

$$\begin{aligned} & N_n + N_{n-1} + \ldots + N_{n-k+1} \\ & \quad = n(n-1)\ldots(n-k+1) \\ & \qquad \times \left\{ m - \left[\frac{\nu_{n-k}}{k(k-1)\ldots 1} + \frac{\nu_{n-k-1}}{(k+1)k \ldots 2} + \ldots + \frac{\nu_0}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Enfin, en tenant compte de (3), et en posant

$$\varepsilon_{n-q} = 1 - \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-k+1)},$$

on obtient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & N_n + N_{n-1} + \ldots + N_{n-k+1} \\ & = n(n-1)\ldots(n-k+1)(\varepsilon_{n-k}\nu_{n-k} + \varepsilon_{n-k-1}\nu_{n-k-1} + \ldots + \varepsilon_0\nu_0). \end{aligned} \right.$$

3. Des nombres ν on sait seulement qu'ils ne peuvent être négatifs, à l'exception de ν_0, qui est toujours 1. Par suite,

$$\begin{aligned} N_n + N_{n-1} + \ldots + N_{n-k+1} & \geqq n(n-1)\ldots(n-k+1)\varepsilon_0\nu_0 \\ & = n(n-1)\ldots(n-k+1) - 1. \end{aligned}$$

En d'autres termes :

Théorème. — *Un groupe du $n^{ième}$ degré, k fois transitif, a au moins $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)-1$ substitutions, qui déplacent plus de $n-k$ éléments.*

Pour $k=1$, on a un théorème connu ([1]). Pour $k=2$, on voit qu'un groupe doublement transitif, de degré n, a au moins n^2-n-1 substitutions, qui laissent un seul élément fixe, lorsqu'elles ne déplacent pas tous les éléments. Pour $k=n-2$, il doit y avoir au moins $3.4.5\ldots n-1$ substitutions, qui déplacent plus de deux éléments. En y joignant la substitution unité, on trouve au moins $\frac{1}{2}n!$ substitutions. Si l'on exclut le groupe symétrique, qui est n fois transitif, on voit que le groupe considéré est précisément le groupe alterné. Celui-ci, en effet, n'a pas de substitutions déplaçant seulement deux éléments. Il n'y a donc que le groupe alterné, qui *puisse* être $n-2$ fois transitif, et l'on sait que *réellement* il en est ainsi ([2]).

([1]) Netto, *Substitutionentheorie,* p. 71, *Lehrsatz III*; dû à M. Jordan.

([2]) Netto, *Substitutionentheorie,* p. 73.

4. **Théorème.** — *Tout groupe de degré n, transitif k fois, n'a pas de sous-groupe de même degré, et de même transitivité, qui ait en commun avec lui les substitutions déplaçant plus de $n-k$ éléments.*

Soient G le groupe, et G′ un sous-groupe, qui possède les propriétés indiquées. Appliquons aux deux groupes la relation (5). Il vient, par soustraction,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon_{n-k}(\nu_{n-k}-\nu'_{n-k})\\ &\quad+\varepsilon_{n-k-1}(\nu_{n-k-1}-\nu'_{n-k-1})+\ldots+\varepsilon_0(\nu_0-\nu'_0)=0.\end{aligned}\right.$$

Si $k \gtreqless 2$, les quantités ε sont essentiellement *positives*. D'autre part, puisque G′ est contenu dans G, les quantités placées entre parenthèses ne peuvent être *négatives*. Il est donc nécessaire qu'elles soient nulles, pour que la relation (6) ait lieu. En joignant ce résultat aux hypothèses faites, on voit que $N_q = N'_q$, *pour toute valeur de q*. Donc $G' = G$. Observons que, *pour $k=1$, le théorème énoncé ne subsiste plus;* car, dans ce cas, $\varepsilon_{n-1}=0$, et *les deux groupes peuvent différer par les substitutions qui déplacent précisément $n-1$ éléments* (*).