NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Composition mathématique pour l’admission à l’École polytechnique en 1884 ; solution géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 449-456

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__449_0>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1884;

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE (1),

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne une conique $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$; on joint un point M de cette conique aux deux foyers F et F'.

I. On demande d'exprimer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle MFF', au moyen des coordonnées du point M.

II. Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que, si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points M et M' de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu du segment MM'.

III. Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P : on déterminera en coordonnées polaires l'équation du lieu décrit par le point P. (On prendra le foyer F pour origine des rayons et l'axe des x pour origine des angles.)

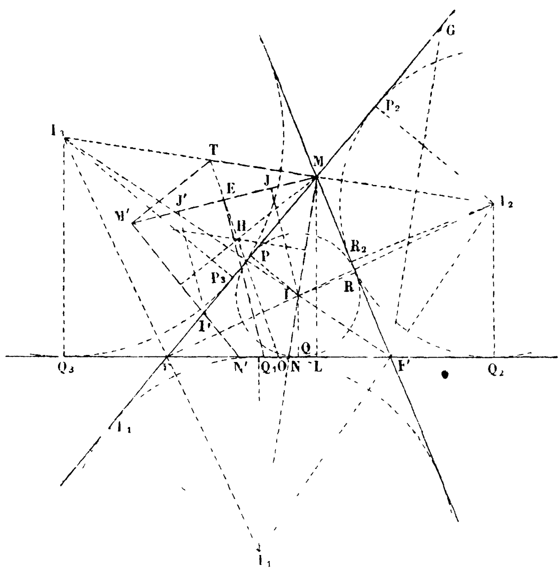
N. B. — Dans toutes ces questions il est nécessaire de distinguer le cas où la conique donnée est une ellipse de celui où elle est une hyperbole.

Traçons les cercles exinscrits au triangle FMF'. Soient I_1, I_2, I_3 leurs centres. La figure formée ainsi donne lieu à quelques propositions de Géométrie élé-

(1) On n'attendait pas des candidats une solution de ce genre.

mentaire, utiles pour la suite et que je vais d'abord rappeler.

Les segments, tels que FQ_2, MP_1, ..., *sont égaux au demi-périmètre du triangle* FMF'; *un segment, tel que* MP, *compté à partir du sommet* M, *est égal au demi-*



périmètre du triangle FMF' *diminué de la longueur du côté* FF' *opposé à* M.

Le cercle inscrit et le cercle exinscrit qui ont leurs centres en I *et* I_1 *sur la bissectrice* MII_1 *intérieure au triangle* FMF', *touchent la base* FF' *aux points* Q *et* Q_1 *qui sont distants l'un de l'autre d'une longueur égale à la différence des côtés* MF, MF'.

Les cercles exinscrits, qui ont leurs centres en I_2, I_3 *sur la bissectrice* I_2MI_3 *extérieure au triangle* FMF', *touchent la base* FF' *aux points* Q_2, Q_3 *qui sont distants* *l'un de l'autre d'une longueur égale à la somme des côtés* MF, MF'.

Les points Q, Q_1 *sont à égale distance du point* O *milieu de* FF', *il en est de même pour* Q_2 *et* Q_3.

Appelons $2c$ la longueur de la base FF' et a la longueur du segment OQ_2. Décrivons une circonférence tangente en Q_2 à la droite FF' et menons des points F, F' des tangentes à cette circonférence. Ces tangentes se coupent en un point tel que M qui, d'après ce que nous venons de rappeler, est tel que la somme de ses distances à F et F' est égale à $2OQ_2$. Le lieu de ce point, lorsqu'on fait varier le rayon de la circonférence tangente en Q_2 à FF', est donc une ellipse dont les foyers sont F et F' et dont le grand axe est Q_2Q_3. On obtient de la même manière cette ellipse en prenant les circonférences tangentes à FF' au point Q_3. En employant des circonférences tangentes en Q ou Q_1 à la droite FF', on obtient, au moyen du même mode de génération, une hyperbole dont les foyers sont F, F' et les sommets Q et Q_1.

Considérons d'abord l'ellipse (M) lieu des points de rencontre tels que M des tangentes menées de F et F' aux circonférences tangentes au point Q_2 à FF'.

Appelons x et y les coordonnées du point M; X, Y les coordonnées du point I; X_1, Y_1 les coordonnées du centre I_1, et ainsi de suite. On voit sur la figure que

$$\frac{y-Y}{Y}=\frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{IN}}=\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{FN}}.$$

Menons F'G parallèlement à la bissectrice MN. Le dernier rapport est égal à $\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{FF'}}$, c'est-à-dire $\frac{a}{c}$; on a donc

$$\frac{y-Y}{Y}=\frac{a}{c},$$

d'où

$$\text{(1)} \qquad Y = \frac{c}{a+c}\,y.$$

Il résulte de là que : *quel que soit le point* M *sur l'ellipse* (M), *les centres tels que* I *partagent les normales* MN *en segments proportionnels.*

On démontre de la même manière le théorème analogue pour le centre I_1 situé comme I sur la normale MN à l'ellipse (M).

Pour déterminer la relation entre x et X, on peut s'appuyer sur le théorème que nous venons de démontrer et sur ce que la normale en M à (M) est partagée par les axes de cette courbe en segments proportionnels aux carrés des longueurs de ces axes ; on y arrive aussi de la manière suivante.

On a

$$\frac{Q_1L \text{ ou } (X-x)}{QL \text{ ou } (x-X)} = \frac{I_1M}{IM} = \frac{P_1M}{PM} = \frac{a+c}{a-c},$$

d'où

$$\text{(2)} \qquad X = \frac{c}{a}\,x.$$

Les triangles semblables FQI, FQ_2I_2 donnent

$$\frac{Y_2}{Y} = \frac{c-a}{c-X}.$$

Introduisons les valeurs de Y et de X que nous venons de trouver, il vient

$$\text{(3)} \qquad Y_2 = \frac{ay}{a+x}.$$

On voit du reste facilement sur la figure que

$$Y_2Y_3 = a^2 - c^2, \quad \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} = \frac{2}{y}.$$

Passons au cas où le point M *décrit une hyperbole.*

Conservons les mêmes notations pour les coordonnées de M et des centres I, I_1, ... La seule différence avec le cas précédent, c'est que OQ est maintenant égal à a. On pourrait, comme précédemment, déterminer les coordonnées des centres I, I_1 en fonction de x et y ; mais on y arrive tout de suite en remplaçant, dans les formules (1), (2), (3), X par a et a par X_2. La relation (2) donne ainsi

$$X_2 = \frac{cx}{a}; \tag{4}$$

la formule (1) donne

$$Y = \frac{cy}{X_2 + c} = \frac{ay}{x + a}, \tag{5}$$

et enfin la formule (3) donne

$$Y_2 = \frac{ay}{a + c}. \tag{6}$$

De cette dernière formule il résulte que :

Lorsque M décrit une hyperbole, les centres, tels que I_2, partagent les normales à l'hyperbole en segments proportionnels. On voit aussi qu'il en est de même des centres tels que I_3.

Les formules que nous venons de trouver répondent à la première partie de la question proposée. Elles permettent aussi de démontrer facilement que :

Lorsque M *décrit une ellipse, les centres* I *et* I_1 *décrivent des ellipses et, lorsque* M *décrit une hyperbole, les centres* I_2, I_3 *décrivent des hyperboles.*

Soient M'N' la normale en M' à l'ellipse (M) et I' le centre du cercle inscrit au triangle FM'F'. En vertu d'un théorème dû à M. Laguerre (que nous démontrerons plus loin) *les projections sur* MM' *des normales* MN, M'N' *sont égales.* Comme les centres I et I' partagent proportionnellement MN et M'N', *les projections* MJ, M'J' *des* *segments* MI, M′I′ *sur* MM′ *sont aussi égales*. On a alors, en appelant E le point milieu du segment MM′,

$$\overline{EI}^2 - \overline{EI'}^2 = \overline{IJ}^2 - \overline{I'J'}^2 = \overline{MI}^2 - \overline{M'I'}^2,$$

et, comme *les segments, tels que* MP, *sont de longueurs égales,* on voit que $\overline{MI}^2 - \overline{M'I'}^2$ est égal à la différence des carrés des rayons des cercles inscrits aux triangles FMF′, FM′F′; par suite, *le point* E *appartient à l'axe radical de ces deux cercles.*

De la même manière, on arrive à cette propriété pour le cercle exinscrit dont le centre I_1 est sur la normale MN à l'ellipse et pour le cercle analogue dont le centre I'_1 est sur la normale en M′ à cette courbe.

Dans le cas de l'hyperbole, on a aussi cette même propriété pour les deux couples de cercles dont les centres sont sur la normale en M à cette courbe et sur la normale à cette courbe en un second point. La deuxième partie de la question proposée est donc démontrée.

Il résulte des propriétés élémentaires rappelées précédemment que, pour le cas de l'ellipse, le segment FP_3 est égal à $a - c$ et le segment FP_2 est égal à $a + c$. *Le lieu des points* P_2 *et* P_3 *se compose donc de deux circonférences concentriques*. Le segment MP est aussi égal à $a - c$ et le segment MP_1 est égal à $a + c$. *Le lieu des points, tels que* P *et* P_1, *se compose donc de deux conchoïdes d'ellipse*.

L'équation en coordonnées polaires de l'ellipse (M) étant $\rho = \dfrac{a^2 - c^2}{a - c\cos\omega}$, l'équation en coordonnées polaires du lieu des points, tels que P, est

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\omega} - (a - c).$$

Cette conchoïde a un point de rebroussement en F, et elle rencontre FF′ à angle droit au point F′.

Dans le cas de l'hyperbole, *le lieu des points, tels que* P *et* P_1, *se compose de deux circonférences concentriques et le lieu des points, tels que* P_2 *et* P_3, *se compose de deux conchoïdes de l'hyperbole.*

Telle est la réponse à la troisième et dernière partie de la question posée.

Il nous reste à démontrer le théorème dont nous nous sommes servi dans la deuxième partie.

Pour cela, il suffit de faire voir que *la perpendiculaire à* MM′ *élevée du point* E, *milieu de cette corde, passe par les milieux des segments interceptés sur les axes de* (M) *par les normales* MN, M′N′ *à cette courbe.*

Les axes de l'ellipse (M) et la corde MM′ partagent dans le même rapport les normales MN, M′N′ à l'ellipse. Les droites, partagées par les axes et MM′ en segments dans ce même rapport, sont tangentes à une même parabole. Ces droites, à leur tour, déterminent sur MM′ et les axes de l'ellipse des segments proportionnels. Nous voyons ainsi déjà que la droite qui joint le point E au milieu du segment NN′ est une tangente à cette parabole. Pour prouver que cette droite rencontre MM′ à angle droit, il suffit de montrer que le point E appartient à la directrice de cette parabole. Je dis que *cette directrice est la droite qui joint le point* O *au point de rencontre* T *des tangentes en* M *et* M′ *à l'ellipse* (M).

D'abord le point O est un point de la directrice de la parabole, puisque les axes de l'ellipse M sont tangents à cette courbe et se rencontrent en O à angle droit. La droite OT contient le point E milieu de MM′; elle contient alors aussi le sommet H du parallélogramme formé par les tangentes TM, TM′, et les parallèles M′H, MH à ces tangentes. Il résulte de la construction du point H qu'il est le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par la corde MM′ et les normales MN, M′N′ : triangle qui est circonscrit à la parabole. On sait qu'alors ce point de rencontre des hauteurs est sur la directrice de la parabole; donc..., etc.

M. Laguerre a fait connaître son théorème dans le cas où l'on a une surface du deuxième ordre et les normales à cette surface en deux points M et M'.

On arrive à ce dernier théorème en considérant les projections des normales en M et M' sur un plan mené par MM' perpendiculairement à l'un des plans principaux de la surface du deuxième ordre et en faisant usage du théorème que nous venons de démontrer.