Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 438-446

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__438_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1360

(voir 2e série, t. XX, p. 144).

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Trouver les trajectoires orthogonales d'une droite de longueur constante mobile entre deux axes rectangulaires. (BARBARIN.)

On peut voir immédiatement que ces trajectoires sont des épicycloïdes. En effet, la normale d'une des courbes cherchées, ayant une longueur constante comprise entre Ox et Oy, qui n'est autre chose que la droite mobile donnée, est toujours tangente à une épicycloïde; cette épicycloïde est donc la développée des courbes cherchées, et l'une de ces courbes sera elle-même une épicycloïde. C'est d'ailleurs ce que nous allons trouver par le calcul.

Soient l la longueur constante de la droite mobile AB et x, y les coordonnées d'un point quelconque M de cette droite.

La tangente à la trajectoire fait avec les axes des angles dont les cosinus sont respectivement $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, et, comme cette tangente est perpendiculaire à AB, il en résulte

$$AM = y\frac{ds}{dx},\quad BM = x\frac{ds}{dy};$$

par suite,

$$x\frac{ds}{dy} + y\frac{ds}{dx} = l.$$

Telle est l'équation différentielle des trajectoires.

Pour l'intégrer, posons $\frac{dy}{dx} = p$; elle devient

$$x + py = \frac{lp}{\sqrt{1+p^2}} \tag{1}$$

ou, en différentiant et remplaçant dx par $\frac{dy}{p}$,

$$\frac{dy}{dp} + \frac{p}{1+p^2}y = \frac{lp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

L'intégrale générale de cette équation linéaire est

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[C + l\int\frac{p\,dp}{(1+p^2)^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[C - \frac{l}{2(1+p^2)}\right];$$

l'élimination de p entre cette équation et l'équation (1) donnerait l'équation générale des trajectoires. Mais il est préférable d'exprimer x et y en fonction de l'angle α de la tangente avec l'axe des x; il suffit de poser

$$p = \tang\alpha,$$

et les expressions de x et de y deviennent

$$\left\{\begin{aligned} x &= l\sin\alpha + \frac{l}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha - C\sin\alpha,\\ y &= -\frac{l}{2}\cos^3\alpha + C\cos\alpha. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Toutes les courbes obtenues en faisant varier C sont des courbes parallèles; car, en faisant

$$x_0 = l \sin \alpha + \frac{l}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad y_0 = -\frac{l}{2} \cos^3 \alpha,$$

on a

$$x = x_0 + C \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad y = y_0 + C \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

ce qui exprime que le point x, y s'obtient en portant sur la normale, au lieu du point x_0, y_0, une longueur constante C. Parmi toutes ces courbes, choisissons celle qui passe par le milieu de la droite AB, quand cette droite est également inclinée sur les axes. Nous obtiendrons la valeur de C correspondant à ce cas; en écrivant que pour ce point $x = y$ et $\sin \alpha = \cos \alpha$; ce qui donne

$$C = \frac{3l}{4}.$$

Les valeurs de x et de y peuvent alors se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{3l}{8} \sin \alpha + \frac{l}{8} \sin 3\alpha, \\ y &= \frac{3l}{8} \cos \alpha - \frac{l}{8} \cos 3\alpha. \end{aligned} \right.$$

A l'inspection de ces formules, on reconnaît que la courbe est une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence de rayon $\frac{3l}{8}$ roulant à l'intérieur d'une circonférence de rayon $\frac{l}{2}$; donc cette épicycloïde et ses courbes parallèles donnent la solution générale du problème proposé. On peut dire encore que toutes ces trajectoires orthogonales sont les développantes d'une même épicycloïde.

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart, Moret-Blanc, Lez, Évesque.

Question 1465

(voir 3e série, t. II, p. 383);

PAR M. BARISIEN,
Lieutenant au 141e de ligne, à Bastia.

De deux points situés sur l'axe des x et équidistants de l'origine, on mène des tangentes à la conique représentée par l'équation

$$ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x = 0;$$

prouver que les points d'intersection de ces tangentes sont sur la conique

$$by^2 + hxy - x = 0.$$

(WOLSTENHOLME.)

La conique donnée passe par l'origine et est normale à l'axe des x.

Soient α et β les coordonnées d'un point M du plan. L'équation quadratique des tangentes menées du point (α, β) à la conique donnée est

$$(ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x)(a\alpha^2 + b\beta^2 + 2h\alpha\beta - 2\alpha) \\ - [a\alpha x + b\beta y + h(\alpha y + \beta x) - (x + \alpha)]^2 = 0.$$

En faisant $y = 0$, nous avons l'équation aux abscisses des points d'intersection de ces deux tangentes avec l'axe des x,

$$(ax^2 - 2x)(a\alpha^2 + b\beta^2 + 2h\alpha\beta - 2\alpha) \\ - [x(a\alpha + \beta h - 1) - \alpha]^2 = 0$$

ou, en réduisant,

$$x^2(ab\beta^2 - \beta^2 h^2 + 2\beta h - 1) - 2x(b\beta^2 + h\alpha\beta - \alpha) - \alpha^2 = 0.$$

La condition pour que les deux racines de cette équation soient égales et de signe contraire s'exprime par la relation

$$b\beta^2 + h\alpha\beta - \alpha = 0.$$

Les points (α, β) se trouvent donc bien sur la courbe

$$by^2 + hxy - x = 0,$$

qui est une hyperbole passant par l'origine, et normale à l'axe des x.

Question 1488

(voir 3e série, t. II. p. 351);

PAR M. N. GOFFART.

Décomposer en deux facteurs du second degré le premier membre de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

où l'on suppose

$$A\sqrt{D} = C.$$

(FRANCESCO BORLETTI.)

On a immédiatement

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 + \frac{A}{2}x + \sqrt{D}\right)^2 \\
&\quad = x^4 + Ax^3 + x^2\left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D}\right) + A\sqrt{D}x + D \\
&\quad = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + x^2\left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B\right);
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\
&\quad = \left(x^2 + \frac{A}{2}x + \sqrt{D}\right)^2 - x^2\left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B\right) \\
&\quad = \left\{x^2 + \left[\frac{A}{2} + \left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B\right)^{\frac{1}{2}}\right]x + \sqrt{D}\right\} \\
&\qquad \times \left\{x^2 + \left[\frac{A}{2} - \left(\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B\right)^{\frac{1}{2}}\right]x + \sqrt{D}\right\}.
\end{aligned}$$

Chaque facteur de ce produit peut à son tour se décomposer en deux facteurs du premier degré; en groupant ces derniers deux à deux, on a les deux autres décompositions.

Remarque. — L'équation proposée prend la forme des équations *réciproques* si l'on pose $x = y\sqrt[4]{D}$; elle devient

$$y^4 + \frac{A}{\sqrt[4]{D}}y^3 + \frac{B}{\sqrt{D}}y^2 + \frac{A}{\sqrt[4]{D}}y + 1 = 0.$$

Elle se résout donc aisément au moyen des deux équations du second degré

$$y^2 + y\left(\frac{A}{2\sqrt[4]{D}} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4\sqrt{D}} + \frac{2\sqrt{D} - B}{\sqrt{D}}}\right) + 1 = 0$$

ou

$$x^2 + x\left(\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + 2\sqrt{D} - B}\right) + \sqrt{D} = 0,$$

dont les premiers membres sont précisément les facteurs déjà trouvés.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Realis; Pisani; et G. Richard.

Question 1492

(voir 3e série, t. II, p. 352);

PAR M. N. GOFFART.

Soit O *un point intérieur à un triangle* ABC, *démontrer que*

$$\frac{OA.BC}{\sin(BOC - BAC)} = \frac{OB.CA}{\sin(COA - CBA)} = \frac{OC.AB}{\sin(AOB - ACB)}\ (^1).$$

(J. Brill, B.-A.)

Les droites AO, BO, CO rencontrent le cercle circonscrit au triangle ABC en des points A', B', C' qui sont les sommets d'un triangle dans lequel les angles A', B',

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

C′ sont précisément les différences

$$\text{BOC} - \text{BAC}, \quad \text{COA} - \text{CBA}, \quad \text{AOB} - \text{ACB}.$$

Or les triangles AOC et A′OC′ sont semblables; et il en est de même de AOB, A′OB′. Donc

$$\frac{\text{AC}}{\text{A}'\text{C}'} = \frac{\text{OC}}{\text{OA}'} \quad \text{et} \quad \frac{\text{A}'\text{B}'}{\text{AB}} = \frac{\text{OA}'}{\text{OB}}.$$

Multipliant membre à membre, il vient, après transposition,

$$\frac{\text{OB}.\text{AC}}{\text{A}'\text{C}'} = \frac{\text{OC}.\text{AB}}{\text{A}'\text{B}'}.$$

En considérant le couple des triangles BOC, B′OC′, avec chacun des précédents, on a de même

$$\frac{\text{OA}.\text{BC}}{\text{B}'\text{C}'} = \frac{\text{OB}.\text{CA}}{\text{C}'\text{A}'} = \frac{\text{OC}.\text{AB}}{\text{A}'\text{B}'}.$$

Remplaçant B′C′, C′A′, A′B′ par les quantités proportionnelles $\sin \text{A}'$, $\sin \text{B}'$, $\sin \text{C}'$, on a la relation demandée.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1493

(voir 3ᵉ série, t. III, p. 352);

PAR UN ANONYME.

On suppose que les côtés a, b, c d'un triangle sont multiples du rayon r du cercle inscrit, et l'on donne la somme $a^3 + b^3 + c^3$ de leurs cubes; trouver les valeurs de ces côtés.

Par hypothèse : $a = \alpha r$, $b = \beta r$, $c = \gamma r$, α, β, γ étant des nombres entiers. Par suite,

$$\frac{a+b+c}{2} \quad \text{ou} \quad p = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)r;$$

$$p-a = \left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)r,$$

$$p-b = \left(\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right)r,$$

$$p-c = \left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)r.$$

En remplaçant p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ par ces expressions dans la formule connue

$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c),$$

il vient

$$\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)r^3 = \frac{(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)r^3}{8};$$

d'où

$$4(\alpha+\beta+\gamma) = (\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$$

ou, en posant

$$(1) \quad (\beta+\gamma-\alpha) = A, \quad (\alpha+\gamma-\beta) = B, \quad (\alpha+\beta-\gamma) = C,$$

$$(2) \qquad 4(A+B+C) = ABC,$$

Il est facile de conclure des égalités (1) et (2) que A, B, C sont nécessairement des nombres pairs.

Les nombres A, B, C ne peuvent être égaux; car les égalités $A = B = C$ donneraient

$$12A = A^3,$$

d'où

$$A^2 = 12,$$

et A serait incommensurable.

Soit A le plus grand de ces trois nombres, on aura

$$A + B + C < 3A$$

et par suite

$$ABC < 12A; \quad BC < 12.$$

D'autre part, l'équation (2)

$$4(A + B + C) = ABC$$

revient à

$$4(B + C) = (BC - 4)A;$$

et sous cette forme elle donne $BC > 4$.

Or le produit BC des deux nombres pairs B, C étant compris entre 4 et 12 est nécessairement égal à 8. Donc, en supposant $B > C$, on a

$$B = 4 \quad \text{et} \quad C = 2, \quad \text{d'où} \quad A = 6.$$

En remplaçant A, B, C par 6, 4, 2, on tire des équations (1) :

$$\alpha = 3, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 5;$$

d'où

$$a = 3r, \quad b = 4r, \quad c = 5r$$

et

$$a^3 + b^3 + c^3 = (3^3 + 4^3 + 5^3)r^3 = (6r)^3.$$

Par conséquent, en nommant s la somme donnée, égale à $a^3 + b^3 + c^3$, on aura

$$(6r)^3 = s, \quad r = \frac{1}{6}\sqrt[3]{s}$$

et

$$a = \frac{3}{6}\sqrt[3]{s}, \quad b = \frac{4}{6}\sqrt[3]{s}, \quad c = \frac{5}{6}\sqrt[3]{s}.$$

La question est ainsi résolue.

Si, comme exemple, on suppose

$$s = 5832 = 18^3,$$

il en résultera

$$r = 3, \quad a = 9, \quad b = 12, \quad c = 15.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.