E. CESÀRO

Propriétés d'une fonction arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 431-434

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__431_1>

PROPRIÉTÉS D'UNE FONCTION ARITHMÉTIQUE;

PAR M. E. CESARO.

I. Ayant décomposé p, de toutes les manières possibles, en n nombres entiers, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, posons

$$u_{n,p} = \sum \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_n)}.$$

Cette fonction u jouit de curieuses propriétés, que nous allons énoncer, en laissant au lecteur le soin de chercher les démonstrations.

Nous supposons $u_{n,p} = 0$, si n est inférieur à 1, ou supérieur à p.

II. **Théorème.** — *B_p étant le $p^{\text{ième}}$ des nombres de Bernoulli, définis par l'égalité symbolique*

$$(B+1)^p - B^p = 0,$$

on a

$$B_p = 1.2.3\ldots p \left[\frac{1}{1+u}\right]^p,$$

pourvu que, après avoir développé le second membre par rapport aux puissances croissantes de u, on remplace u^n par $u_{n,p}$.

En d'autres termes,

$$\frac{B_p}{1.2.3\ldots p} = -C_{p,1}u_{1,p} + C_{p+1,2}u_{2,p} - C_{p+2,3}u_{3,p} + \ldots \pm C_{2p-1,p}u_{p,p}.$$

Par exemple,

$$\frac{B_4}{1.2.3.4} = -4u_{1,4} + 10u_{2,4} - 20u_{3,4} + 35u_{4,4}.$$

Or

$$u_{1,4} = \frac{1}{5},$$

$$u_{2,4} = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.2} = \frac{13}{36},$$

$$u_{3,4} = \frac{1}{2.2.3} + \frac{1}{2.3.2} + \frac{1}{3.2.2} = \frac{1}{4},$$

$$u_{4,4} = \frac{1}{2.2.2.2} = \frac{1}{16};$$

par conséquent

$$B_4 = 24\left(-\frac{4}{5}+\frac{65}{18}-5+\frac{35}{16}\right) = -\frac{1}{30}.$$

III. $S_{n,p}$ étant la somme des produits p à p, des n premiers nombres naturels, on a *symboliquement*

$$\frac{S_{n-p+1,p}}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p)} = [1+u]^n.$$

Par exemple, pour $p=3$, on trouve, après quelques transformations,

$$S_{n,3} = 6\,C_{n+1,4} + 20\,C_{n+1,5} + 15\,C_{n+1,6}.$$

Si l'on ordonne $S_{n,p}$ par rapport aux puissances de n, on reconnaît que $-\frac{B_p}{p}$ est le coefficient de n.

IV. Si l'on pose

$$A_p = \frac{u_{1,p}}{1} + \frac{u_{2,p}}{1.2} + \frac{u_{3,p}}{1.2.3} + \frac{u_{4,p}}{1.2.3.4} + \ldots,$$

on a, *symboliquement*,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{1+Ax},$$

c'est-à-dire

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{2447}{5760}x^4-\ldots\right].$$

V. On a

$$u_{1,p} = \frac{1}{p+1},$$

$$u_{2,p} = \frac{2}{p+2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{p}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_{p,p} = \frac{1}{2^p}.$$

On peut calculer les valeurs de la fonction u au moyen de la relation

$$(n+p)u_{n,p} = (n+p-1)u_{n,p-1} + nu_{n-1,p-1}.$$

On obtient ainsi le Tableau suivant :

	$u_{1,p}$	$u_{2,p}$	$u_{3,p}$	$u_{4,p}$	$u_{5,p}$	...
$u_{n,1}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	...
$u_{n,2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	...
$u_{n,3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	0	0	...
$u_{n,4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	...
$u_{n,5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{17}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{32}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

VI. Voici quelques autres propriétés de la fonction u :

$$C_{p+1,1}u_{1,p} - C_{p+2,2}u_{2,p} + C_{p+3,3}u_{3,p} - \ldots \pm C_{2p,p}u_{p,p} = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots p},$$

$$C_{p+2,1}u_{1,p} - C_{p+3,2}u_{2,p} + C_{p+4,3}u_{3,p} - \ldots \pm C_{2p+1,p}u_{p,p} = \pm \frac{2^{p+1}-(p-1)}{1.2\ldots3(p+1)},$$

$$\frac{u_{1,p}}{1} - \frac{u_{2,p-1}}{1.2} + \frac{u_{3,p-2}}{1.2.3} - \frac{u_{4,p-3}}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{p}{1.2.3\ldots(p-1)},$$

$$\frac{u_{1,p}}{1} + \frac{u_{2,p-1}}{1.2} + \frac{u_{3,p-2}}{1.2.3} + \frac{u_{4,p-3}}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} - \ldots - \frac{1}{2.3.4\ldots p}.$$