NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FONTENÉ

Concours général de 1883, mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 423-430

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__423_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(voir 3e série, t III, p 202);

PAR M. FONTENÉ,
Professeur au Collège Rollin.

D'un point P, *pris sur une normale en un point* A *d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds les points* B, C, D, E :

1° *Trouver l'équation de la sphère* S *passant par les quatre points* B, C, D, E;

2° *Trouver le lieu des centres* I *des sphères* S *quand le point* P *se déplace sur la normale au point* A, *ainsi que la surface engendrée par la droite* PI.

Je démontre d'abord le théoreme suivant, analogue au théorème connu de Joachimsthal sur les normales à l'ellipse, et que je crois nouveau. La démonstration s'applique au théorème de Joachimsthal.

THÉORÈME. — *Si d'un point* P *on mène à une surface du second degré les six normales dont les pieds sont* A, B, C, D, E, F, *les cinq points* B, C, D, E, F, *et le point* A' *diamétralement opposé au point* A *sont sur une infinité de surfaces du second degré ayant leurs axes parallèles à ceux de la surface donnée; par suite, sur trois surfaces de révolution du second degré, dont les axes sont parallèles à ceux de la surface donnée.*

Soit l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Les coordonnées x, y, z du pied d'une des normales vérifient l'équation (1); les coordonnées x_0, y_0, z_0 du pied A donnent en particulier

$$(2) \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Retranchant cette équation de la précédente, on a

$$(3) \qquad \sum \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{a^2} = 0.$$

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point P; on a

$$\frac{x_1 - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y_1 - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z_1 - z}{\frac{z}{c^2}} = k;$$

en particulier,

$$\frac{x_1 - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y_1 - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{z_1 - z_0}{\frac{z_0}{c^2}} = k_0;$$

on en tire

$$x_1 = x\left(1 + \frac{k}{a^2}\right) = x\frac{(a^2 + k)}{a^2}, \quad \dots,$$

$$x_1 = x_0\left(1 + \frac{k_0}{a^2}\right) = x_0\frac{a^2 + k_0}{a^2}, \quad \dots,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{x}{x_0} = \frac{a^2 + k_0}{a^2 + k}, \quad \dots.$$

On a, par suite,

$$\frac{x - x_0}{x} = \frac{k_0 - k}{a^2 + k_0}.$$

L'équation (3) devient, en divisant par $k_0 - k$,

$$(5) \qquad \sum \frac{x(x+x_0)}{a^2(a^2+k_0)} = 0.$$

Il est facile de voir que la division par $k_0 - k$ supprime le point A; en effet, si l'on suppose le point A donné par ses coordonnées x_0, y_0, z_0, et le point P sur la normale en A donné par le paramètre k_0, les équations (4) donnent x, y, z en fonction de k; l'équation (3) est alors une équation en k qui donne les pieds des six normales, et, en supprimant le facteur $k_0 - k$, on supprime le point A.

L'équation (5) est donc celle d'une surface du second degré qui passe par les cinq points B, C, D, E, F; il est visible qu'elle passe par le point A'. Or cette surface a ses axes parallèles à ceux de la surface donnée, et celle-ci contient également les six points B, C, D, E, F, A'. Donc ces six points sont tels qu'il y passe une infinité de surfaces du second degré ayant leurs axes parallèles à ceux de la surface donnée; ce qui constitue un théorème, puisque les directions des axes font trois conditions.

Parmi ces surfaces, la surface (5) est celle qui passe au centre O de la surface donnée; son centre est le milieu de OA'.

Parmi ces surfaces, il y a encore trois surfaces de révolution dont les axes sont respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz. Comme une telle surface ne dépend que de cinq paramètres, trois pour le centre, deux pour les longueurs d'axes, elle est déterminée par les cinq points B, C, D, E, F, et le fait qu'elle passe en A' constitue un théorème.

On a facilement les équations de ces surfaces de révolution, par exemple de celle dont l'axe est parallèle à Ox. Il suffit d'éliminer y^2 et z^2 entre les équations (1) et (5) et l'identité $y^2 + z^2 - (y^2 + z^2) = 0$; ce qui donne

$$(6)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -(y^2+z^2) \\ \frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} & \frac{x^2}{a^2} - 1 \\ \frac{1}{b^2(b^2+k_0)} & \frac{1}{c^2(c^2+k_0)} & \frac{x^2}{a^2(a^2+k_0)} + \sum \frac{x_0 x}{a^2(a^2+k_0)} \end{vmatrix} = 0.$$

Cas du paraboloïde. — Dans ce cas, l'un des pieds de normale est à l'infini sur l'axe; et l'on a à faire deux hypothèses.

Si le point A est un des pieds à distance finie, A' est à l'infini sur l'axe, et la surface analogue à la surface (5) contient les quatre pieds à distance finie, B, C, D, E, le pied F à l'infini, et le point A'.

Le paraboloïde ayant pour équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$

un calcul analogue au précédent donne pour l'équation de cette surface (1)

$$(7)\quad \frac{y(y+y_0)}{p(p-k_0)} + \frac{z(z+z_0)}{q(q+k_0)} + 2 = 0.$$

C'est un cylindre. Les surfaces du second degré qui passent par la courbe commune sont des paraboloïdes, parmi lesquels est un paraboloïde de révolution dont l'équation est

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & y^2 + z^2 - 2(p+q+k_0)x - (q+k_0)\frac{y_0 y}{p} \\ & \qquad - (p+k_0)\frac{z_0 z}{q} - 2(p+k_0)(q+k_0) = 0. \end{aligned} \right.$$

---

(1) On pose

$$\frac{x_1 - x_0}{1} = \frac{y_1 - y_0}{\frac{y_0}{p}} = \frac{z_1 - z_0}{\frac{z_0}{q}} = k_0.$$

Les deux autres surfaces de révolution sont des cylindres paraboliques.

Si, au contraire, le point A est le pied à l'infini, A' est le sommet du paraboloïde; la méthode précédente n'est plus applicable. Mais, des trois surfaces de révolution qui contiennent alors les cinq points B, C, D, E, F, et le sommet du paraboloïde, celle dont l'axe est parallèle à l'axe du paraboloïde est connue et s'obtient par le calcul suivant.

L'équation du paraboloïde étant

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$

le point P ayant pour coordonnées x_1, y_1, z_1, les pieds des normales sont déterminés par les relations

$$\frac{x_1 - x}{-1} = \frac{y_1 - y}{\frac{y}{p}} = \frac{z_1 - z}{\frac{z}{q}};$$

on en conclut, en tenant compte de l'équation du paraboloïde,

$$2x(x_1 - x) + y(y_1 - y) + z(z_1 - z) = 0$$

ou

$$(9) \qquad 2x^2 + y^2 + z^2 - (2x_1 x + y_1 y + z_1 z) = 0,$$

équation d'une surface de révolution autour d'un axe parallèle à Oz, et qui passe au sommet du paraboloïde.

Cette surface de révolution donne facilement les deux autres.

On peut remarquer qu'elle passe au point P, et que son centre est au milieu de OP.

Elle est indépendante des paramètres du paraboloïde, et forme un lieu géométrique.

Remarque sur une surface qui passe par les pieds de quatre des normales. — L'équation (5) peut s'écrire

$$(10)\qquad \sum \frac{xx_0(x+x_0)}{a^4x_1} = 0,$$

forme symétrique en x et x_0.

Si l'on désigne par x'_0, y'_0, z'_0 les coordonnées du pied F d'une seconde normale issue du point P, on a de même la surface

$$(11)\qquad \sum \frac{xx'_0(x+x'_0)}{a^4x_1} = 0,$$

qui contient les cinq autres pieds.

Les quatre pieds B, C, D, E sont donc sur les surfaces (10) et (11). Retranchant, on a

$$\sum \frac{x^2(x_0-x'_0)+x(x_0^2-x'^2_0)}{a^4x_1} = 0,$$

$$\sum (x_0-x'_0)\frac{x\left(x+\dfrac{x_0+x'_0}{2}\right)}{a^4x_1} = 0.$$

Or on a

$$x_0(a^2+k_0) = a^2x_1,$$
$$x'_0(a^2+k'_0) = a^2x_1;$$

d'où

$$x_0 - x'_0 = (k'_0 - k_0)\frac{x_0x'_0}{a^2x_1}.$$

L'équation devient, en divisant par $k'_0 - k_0$,

$$(12)\qquad \sum \frac{x_0x'_0}{a^6x_1^2}x\left(x+\frac{x_0+x'_0}{2}\right) = 0,$$

équation d'une surface dont les axes sont parallèles à ceux de la surface donnée, et qui contient, outre les quatre points B, C, D, E, le centre O de la surface donnée, et le point k symétrique du milieu de AF par rapport à ce centre; son centre est le milieu de OK.

Equation de la sphère qui passe par quatre des six pieds de normales. — Les quatre pieds B, C, D, E sont sur les trois surfaces à axes parallèles (1), (10), (11). En éliminant x^2, y^2, z^2 entre les équations de ces trois surfaces et l'identité

$$x^2+y^2+z^2-(x^2+y^2+z^2)=0,$$

on aura l'équation de la sphère qui passe en B, C, D, E.

Dans le cas du paraboloïde, A étant un des pieds à distance finie, F le pied à l'infini, il suffit d'ajouter les équations (8) et (9). Mais, comme l'équation (9) contient les coordonnées x_1, y_1, z_1, et qu'on a posé

$$x_1 = x_0 - k_0,$$
$$y_1 = y_0\frac{p+k_0}{p},$$
$$z_1 = z_0\frac{q+k_0}{q},$$

on y remplace d'abord x_1, y_1, z_1 par ces valeurs.

On obtient finalement

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &2(x^2+y^2+z^2)-2x(x_0+p+q)\\ &\quad -(p+q+2k_0)\left(\frac{y_0y}{p}+\frac{z_0z}{q}\right)-2(p+k_0)(q+k_0)=0.\end{aligned}\right.$$

Application au problème du concours général. — On trouve immédiatement, pour le lieu des centres I,

$$x=\frac{x_0}{2}+\frac{p+q}{2},$$
$$\frac{y}{z}=\frac{y_0}{p}:\frac{z_0}{q},$$

c'est-à-dire une droite parallèle au plan yOz et rencontrant Ox.

Quant à la droite PI, elle décrit un paraboloïde. En effet, les points P et I décrivent deux droites, et leurs coordonnées montrent qu'ils sont liés homographiquement, de manière à donner une génératrice à l'infini.

D'ailleurs, si l'on mène par l'origine des parallèles aux droites PI, le lieu de ces parallèles donne le plan directeur

$$\frac{\frac{x}{2}+p\frac{y}{y_0}}{(q-p)-\frac{x_0}{2}}=\frac{\frac{x}{2}+q\frac{z}{z_0}}{(p-q)-\frac{x_0}{2}}.$$