Weill

Sur les quadrilatères qui ont leurs six sommets sur une cubique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 401-410

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__401_0>

SUR LES QUADRILATÈRES QUI ONT LEURS SIX SOMMETS SUR UNE CUBIQUE;

PAR M. WEILL.

Considérons une conique fixe et quatre points A, B, C, D dans son plan. Par ces quatre points, faisons passer une conique variable qui rencontre la conique fixe en quatre points P, Q, R, S. Les six droites qui joignent ces quatre points deux à deux ont pour enveloppe une courbe de troisième classe; en effet, par un point quelconque P de la conique fixe passent trois droites tangentes à l'enveloppe. Soient deux quadrilatères PQRS, P'Q'R'S'; si l'on a pris *au hasard* deux couples de quatre points PQRS, P'Q'R'S' sur la conique fixe, et si l'on fait passer par les quatre premiers points une conique quelconque, et par les quatre autres une autre conique quelconque, ces deux coniques se couperont en quatre points α, β, γ, δ. Ces quatre derniers points seront les points de base d'un faisceau de coniques qui détermineront sur la conique fixe des groupes de quatre points, dont feront partie les groupes PQRS, P'Q'R'S'. On peut alors énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si l'on considère sur une conique deux groupes de quatre points, les côtés et les diagonales des deux quadrilatères qui ont ces points pour sommets sont douze droites tangentes à une même courbe de troisième classe.*

Théorème II. — *Deux quadrilatères quelconques étant circonscrits à une conique, leurs douze sommets sont sur une même cubique.*

D'une manière générale, considérons les m^2 points de base d'un faisceau de courbes du degré m; une courbe du faisceau rencontre la conique en $2m$ points, et les droites qui joignent ces points deux à deux enveloppent une courbe de la classe $2m-1$. On a donc les deux théorèmes suivants :

Théorème III. — *Étant donnés deux groupes de $2m$ points sur une conique, les droites qui joignent entre eux deux à deux les $2m$ points de chaque groupe sont tangentes à une même courbe de la classe $2m-1$.*

Théorème IV. — *Deux polygones quelconques de $2m$ côtés étant circonscrits à une conique, leurs sommets, au nombre de $2m(2m-1)$ sont sur une même courbe d'ordre $2m-1$.*

Ce dernier théorème est dû à M. Darboux, qui l'a établi par des considérations différentes (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, p. 189). Revenons à la conique fixe et aux m^2 points de base du faisceau de courbes d'ordre m; à ces points fixes est liée la courbe de classe $(2m-1)$ dont il est question plus haut; mais, si l'on donne cette courbe, les points de base ne sont pas complètement déterminés. En effet, prenons, pour être plus clair, le cas de quatre points de base et d'un faisceau correspondant de coniques; deux coniques du faisceau déterminent sur la conique fixe deux couples de quatre points PQRS, P'Q'R'S'. Si par les quatre premiers nous faisons passer une conique *quelconque*, et, de même, par les quatre autres, ces deux nouvelles coniques se couperont en quatre points α, β, γ, δ, qui pourront être substitués aux quatre points primitifs ABCD. Nous dirons que ces deux groupes de quatre points ABCD, $\alpha\beta\gamma\delta$ sont *équivalents*.

Cherchons les relations qui existent entre ces deux groupes équivalents.

Pour cela, considérons, en général, trois courbes du degré m, ayant pour équations $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$. Soient $U + \lambda V = 0$, $U + \mu W = 0$ les équations de deux autres courbes de même degré, on a l'identité

$$U + \lambda V - (U + \mu W) = \lambda V - \mu W.$$

De cette identité résulte le théorème suivant :

Théorème V. — *Étant données trois courbes de même degré; si par les points communs à la première et à la deuxième on fait passer une courbe du même degré, puis une autre courbe du même degré par les points communs à la première et à la troisième, il existe une courbe du même degré passant par les points communs à ces deux nouvelles courbes, et par les points communs à la deuxième et à la troisième des courbes primitives.*

En appliquant ce théorème au cas particulier du second degré, on voit que les deux groupes équivalents formés par les quatre points A, B, C, D et les quatre points α, β, γ, δ constituent huit points d'une même conique; de plus, les douze droites obtenues en joignant deux à deux entre eux les points de chaque groupe touchent la courbe de troisième classe qui a été considérée plus haut. Par suite, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Théorème VI. — *Étant donnés une conique* K *et quatre points* A, B, C, D, *si l'on mène par les quatre points une conique* K′ *qui rencontre la première en* PQRS, *et une conique* K″ *rencontrant la première en* P′Q′R′S′, *et enfin par les quatre points* P, Q, R, S *et* *les quatre points* P', Q', R', S', *deux coniques quelconques se coupant en* $\alpha\beta\gamma\delta$:

1° *Les huit points* A, B, C, D, α, β, γ, δ *appartiennent à une même conique* K''';

2° *Deux quelconques des quatre groupes de quatre points sont équivalents entre eux, relativement à la conique qui contient les deux autres groupes;*

3° *Toutes les droites obtenues en joignant entre eux deux à deux les points d'un même groupe sont tangentes à une même courbe de troisième classe;*

4° *Par un point quelconque du plan passent trois droites appartenant à un groupe équivalent à l'un des groupes obtenus; ce groupe s'obtiendra par l'intersection de deux coniques, et le problème des tangentes à mener par un point du plan à la courbe de troisième classe est ramené à trouver les points communs à deux coniques passant par le point considéré.*

Théorème VII. — *Corrélatif du précédent.*

L'enveloppe de troisième classe, dont il est question, peut se décomposer en un point et une conique; on se trouve alors dans le cas où le quadrilatère variable PQRS reste inscrit et circonscrit à deux coniques fixes. On a alors le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Étant donnés deux quadrilatères* PQRS, $P'Q'R'S'$ *inscrits à une conique* H, *et circonscrits à une conique* K, *si l'on mène par les quatre points* P, Q, R, S *une conique quelconque* L, *et par les quatre points* P', Q', R', S' *une autre conique quelconque* L, *ces deux coniques se coupent en quatre points* α, β, γ, δ *formant un quadrilatère circonscrit à la conique* K.

Les théorèmes précédents ont de nombreuses conséquences sur lesquelles nous n'insisterons pas.

THÉORÈME IX. — *Si par trois points fixes* A, B, C, *et par les sommets d'un hexagone inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, on fait passer une cubique, cette courbe passe par six autres points fixes, lorsque l'hexagone se déplace.*

En effet, par un point pris sur la conique circonscrite aux polygones, on ne peut faire passer qu'une seule cubique du système; donc ces cubiques forment un faisceau.

Si les trois points fixes A, B, C sont en ligne droite, les six autres points fixes sont sur une conique.

THÉORÈME X. — *Si par six points fixes et les sommets variables d'un octogone inscrit et circonscrit à deux coniques fixes on fait passer une courbe du quatrième degré, elle passe par dix autres points fixes.*

On voit facilement quel est le théorème général; si l'on veut énoncer des théorèmes de même genre relatifs à des polygones inscrits et circonscrits d'un nombre impair de côtés, il suffit de joindre aux points fixes un autre point fixe pris sur la conique à laquelle le polygone reste inscrit.

THÉORÈME XI. — *Si par cinq points fixes, dont deux situés sur une conique* K, *et les sommets variables d'un quadrilatère inscrit à la conique* K *et circonscrit à une conique fixe, on fait passer une cubique, cette courbe passe par quatre autres points fixes.*

Plus généralement, au lieu du quadrilatère variable inscrit à la conique K et circonscrit à une autre conique fixe, on peut prendre le quadrilatère déterminé sur la conique K par des coniques variables formant un faisceau. On peut facilement étendre ces théorèmes; nous y reviendrons.

Reprenons le théorème relatif aux deux quadrilatères circonscrits à une même conique, et dont les douze sommets sont sur une cubique, et proposons-nous la question réciproque : Étant donnée une cubique, construire des quadrilatères dont les six sommets soient sur la courbe. Soit une droite quelconque rencontrant la cubique en A, B, C; on voit immédiatement qu'on peut construire un nombre limité de quadrilatères dont les six sommets soient sur la cubique, trois d'entre eux étant les points A, B, C; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XII. — *Étant donnée une cubique quelconque, il existe une double infinité de quadrilatères dont les six sommets sont sur la courbe.*

Si, d'un point pris sur la cubique, on mène à la courbe les quatre tangentes, on sait, d'après des théorèmes dus à Maclaurin, que les quatre points de contact forment un quadrilatère dont les six sommets et le point de concours des deux diagonales sont sur la courbe; mais on voit que ces quadrilatères sont en nombre simplement infini; ils forment une classe spéciale de nos quadrilatères : aucun de leurs côtés ne peut être pris au hasard; ces droites ont une enveloppe qui a été beaucoup étudiée.

Soient A, B, C, D, E, F les six sommets d'un quadrilatère inscrit à la cubique, ABC étant une droite choisie arbitrairement; inscrivons une conique S dans ce quadrilatère, et soit L une tangente quelconque à cette conique, laquelle rencontre la cubique en trois points G, H, K; les neuf points A, B, C, D, E, F, G, H, K ne sont pas les points de base d'un faisceau de cubiques, car, les huit points A, B, C, D, E, F, G, H étant donnés, le neuvième point de base du faisceau de cubiques n'est autre que le point R où viennent se rencontrer les tangentes menées par G et H à la conique S. Ceci posé, soient G, H, K, L, M, N les six sommets du quadrilatère circonscrit à la conique S et ayant G, H, K pour trois de ses sommets; ces six points seront sur la cubique, en vertu des théorèmes précédents. On a donc les résultats que nous allons énoncer :

Théorème XIII. — *Étant donné un quadrilatère dont les six sommets sont sur une cubique, une conique inscrite dans ce quadrilatère sera, de même, inscrite à une suite de quadrilatères ayant tous leurs six sommets sur la cubique.*

Théorème XIV. — *Étant donnés deux quadrilatères dont les douze sommets sont sur une cubique, leurs huit côtés sont tangents à une même conique.*

Si d'un point A pris sur la cubique nous menons à cette courbe deux tangentes dont les points de contact soient B et C, et si la droite BC rencontre la cubique en D, une conique qui touchera cette droite en D et qui touchera en des points, d'ailleurs quelconques, les deux droites AB et AC, sera l'une des coniques S que nous avons considérées; en effet, le quadrilatère dont les quatre côtés sont la droite double DBC et les deux droites AB, AC répond à la définition. On a, par suite, le théorème :

Théorème XV. — *Si la tangente à une conique en un point* D *commun à cette conique et à une cubique rencontre la cubique en deux points* B *et* C, *tels que les tangentes en* B *et* C *à la cubique se coupent en* A *sur* *cette courbe et soient, en outre, tangentes à la conique, les mêmes propriétés auront lieu pour les cinq autres points* D′, D″, ..., *où la conique rencontre encore la cubique.*

Remarquons que les coniques S dont il s'agit sont en nombre doublement infini. En prenant pour côtés d'un triangle de référence les droites AB, AC, BC, les équations de la cubique et de la conique S seront

$$\alpha\beta(l\alpha - m\beta) + A\alpha\beta\gamma + \gamma^2(B\alpha + C\beta) = 0,$$
$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + p^2\gamma^2 - 2lm\,\alpha\beta - 2lp\,\alpha\gamma - 2mp\,\beta\gamma = 0.$$

Supposons tracées les deux tangentes AB et AC partant du point A de la cubique, ainsi que la droite BC qui rencontre la cubique en D; soit M un point quelconque de la cubique; proposons-nous de mener par M une droite rencontrant la cubique en deux points, B′ et C′, tels que les tangentes à la cubique en ces points concourent sur la courbe; le théorème précédent permet de résoudre immédiatement ce problème; il suffit, en effet, de faire passer par le point M une conique S qui touche AB, AC, et, en outre, la droite BC au point D; la tangente menée par le point M à cette conique répond à la question.

Considérons un quadrilatère et deux points P, Q, et proposons-nous de trouver le lieu des points de rencontre des tangentes menées par P et Q à toutes les coniques inscrites au quadrilatère; il est facile de voir que ce lieu est une cubique passant par les six sommets du quadrilatère et par les points P et Q; parmi les coniques inscrites au quadrilatère, il en est une qui touche la droite PQ en un point R qui fait partie du lieu; la cubique est donc déterminée par ces neuf points qui sont distincts, à savoir : les six sommets du quadrilatère et les trois points P, Q, R en ligne droite. Supposons maintenant la cubique donnée, et cherchons à retrouver son mode de génération; la cubique étant donnée quelconque, considérons un des quadrilatères étudiés précédemment et qui ont leurs six sommets sur cette cubique; inscrivons une conique à ce quadrilatère, et menons à cette conique une tangente qui rencontre la cubique en PQR, R étant un point commun à la cubique et à la conique; le lieu des points où se rencontrent les tangentes menées par P et Q aux coniques inscrites au quadrilatère est la cubique donnée; on voit qu'à chaque quadrilatère inscrit à la cubique correspondent six modes de génération de cette courbe; les quadrilatères qu'on peut prendre sont, d'ailleurs, en nombre doublement infini. Supposons que P et Q soient les ombilics du plan; dans ce cas, la cubique est une cubique circulaire, lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère. Soit une cubique circulaire donnée, et considérons un quadrilatère, d'ailleurs quelconque, ayant ses six sommets sur la cubique; inscrivons à ce quadrilatère une parabole tangente en un point R à la droite de l'infini : on voit que cette parabole aura pour foyer le *foyer double* réel de la cubique circulaire, et pour axe la parallèle menée par ce foyer à l'asymptote de la cubique; on pourra toujours tracer une parabole assujettie à ces trois conditions simples et devant, en outre, toucher une droite quelconque; une telle parabole sera inscrite à un quadrilatère *aplati* inscrit à la cubique circulaire; donc, toute tangente à cette parabole sera un côté d'un quadrilatère circonscrit à la parabole et inscrit à la cubique. Il en résulte les théorèmes suivants :

Théorème XVI. — *Une cubique quelconque étant donnée, il existe six séries doublement infinies de* *modes de génération de cette courbe comme lieu des points de rencontre des tangentes menées par deux points fixes aux coniques inscrites à un quadrilatère.*

Théorème XVII. — *Une cubique circulaire étant donnée, il existe une série doublement infinie de modes de génération de cette courbe comme lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère, pourvu que le foyer double de cette cubique soit sur la courbe.*

Théorème XVIII. — *Étant donnés une cubique circulaire passant par son foyer double, et un quadrilatère quelconque dont les six sommets sont sur la courbe, la parabole inscrite à ce quadrilatère aura pour foyer le foyer double de la courbe, et pour axe la parallèle à l'asymptote de la cubique menée par son foyer; la tangente à cette parabole en l'un des cinq points où elle rencontre la cubique rencontre cette courbe en deux autres points tels que les tangentes à la cubique en ces points touchent la conique et se coupent sur la cubique.*