Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 386-399
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__386_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1405

(voir 3e série, t. II, p. 336),

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

Si les racines d'une équation de degré pair $2m$ peuvent se partager en m groupes de deux racines x_1, x_2 satisfaisant à la relation

$$(1) \qquad a x_1 x_2 + b(x_1 - x_2) + c = 0,$$

on peut, par une substitution linéaire $x = \dfrac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$, amener l'équation à n'avoir que des termes de degré pair en y. (PELLET.)

De la relation entre x et y on déduit $y = \dfrac{\delta x - \beta}{\alpha - \gamma x}$; par suite, y_1 et y_2 étant les valeurs de y correspondant à x_1

et x_2, on a

$$y_1 = \frac{\delta x_1 - \beta}{\alpha - \gamma x_1}, \quad y_2 = \frac{\delta x_2 - \beta}{\alpha - \gamma x_2}.$$

Mais l'équation en y, ne devant avoir que des termes de degré pair, a ses racines égales deux à deux, et de signes contraires, ce qui exige

$$\frac{\delta x_1 - \beta}{\alpha - \gamma x_1} = - \frac{\delta x_2 - \beta}{\alpha - \gamma x_2}$$

ou

$$(2) \qquad 2\delta\gamma x_1 x_2 - (\alpha\delta + \beta\gamma)(x_1 + x_2) - 2\alpha\beta = 0.$$

Cette relation sera toujours satisfaite si nous l'identifions avec la relation (1). Pour cela, mettons-la d'abord sous la forme

$$2\frac{\delta}{\gamma} x_1 x_2 - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}\right)(x_1 + x_2) - 2\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma} = 0,$$

obtenue en divisant tous ses termes par γ^2. Comme α, β, γ, δ sont indéterminées, nous pouvons égaler leurs coefficients à ceux de la relation (1) :

$$2\frac{\delta}{\gamma} = a, \quad \frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\delta}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = -b, \quad 2\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma} = c.$$

La première équation donne

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{a}{2};$$

la seconde devient alors

$$a\frac{\alpha}{\gamma} + 2\frac{\beta}{\gamma} = -2b;$$

et la troisième peut s'écrire

$$a\frac{\alpha}{\gamma} \times 2\frac{\beta}{\gamma} = ac.$$

Nous connaissons ainsi la somme et le produit de

$$a\frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{et} \quad 2\frac{\beta}{\gamma}.$$

Ces deux quantités sont les racines de l'équation

$$U^2 + 2bU + ac = 0;$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\sqrt{b^2 - ac} - b}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{-(\sqrt{b^2 - ac} + b)}{2}.$$

Portant ces valeurs dans l'expression de x, mise sous la forme

$$x = \frac{\frac{\alpha}{\gamma} y + \frac{\beta}{\gamma}}{y + \frac{\delta}{\gamma}},$$

on aura

$$x = \frac{2(\sqrt{b^2 - ac} - b)y - a(\sqrt{b^2 - ac} + b)}{2ay + a^2}.$$

Cette substitution répond à la question.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1436

(voir 3e serie, t. I, p. 413)

On peut construire trois cercles osculateurs d'une parabole, qui touchent une tangente à cette courbe : démontrer que cette tangente et les tangentes aux points d'osculation touchent un même cercle.

(Laguerre.)

Soient

$$(1) \qquad Y^2 - 2pX = 0$$

l'équation d'une parabole, et

$$(2)\qquad X^2 + Y^2 + 2uX + 2vY + w = 0$$

celle d'un cercle quelconque. Les ordonnées des points communs aux deux courbes sont données par l'équation

$$(3)\qquad Y^4 + 4p(p+u)Y^2 + 8p^2vY + 4p^2w = 0,$$

obtenue en éliminant X entre les deux précédentes.

Soit y l'ordonnée d'un point de la parabole. En écrivant que y est racine triple de l'équation (3), on exprime que le cercle est osculateur à la parabole, puisque l'équation (1) qui fait connaître la valeur correspondante de x est du premier degré. On obtient ainsi les équations

$$\begin{gathered} y^4 + 4p(p+u)y^2 + 8p^2vy + 4p^2w = 0, \\ y^3 + 2p(p+u)y + 2p^2v = 0, \\ 3y^2 + 2p(p+u) = 0. \end{gathered}$$

De la dernière on tire u, de la deuxième v, et de la première w:

$$u = -p - \frac{3y^2}{2p},\quad v = \frac{y^3}{p^2},\quad w = -\frac{3y^4}{4p^2},$$

de sorte que l'équation du cercle osculateur au point y de la parabole est

$$X^2 + Y^2 - 2\left(p + \frac{3y^2}{2p}\right)X + 2\frac{y^3}{p^2}Y - \frac{3y^4}{4p^2} = 0,$$

ou, en mettant en évidence le centre et le rayon,

$$(4)\quad \left(X - p - \frac{3y^2}{2p}\right)^2 + \left(Y + \frac{y^3}{p^2}\right)^2 = \left(p + \frac{3y^2}{2p}\right)^2 + \frac{3y^4}{4p^2} + \frac{y^6}{p^4}.$$

Soit, en fonction de son coefficient angulaire,

$$(5)\qquad Y = mX + \frac{p}{2m}$$

l'équation d'une tangente déterminée à la parabole. Pour exprimer que le cercle (4) est tangent à cette droite, on écrit que la droite est à une distance du centre dont le carré est égal à celui du rayon. On a, pour déterminer les ordonnées des points d'osculation correspondants sur la parabole, l'équation

$$\frac{\left[\frac{y^3}{p^2}+m\left(p+\frac{3y^2}{2p}\right)+\frac{p}{2m}\right]^2}{1+m^2}=\left(p+\frac{3y^2}{2p}\right)^2+\frac{3y^4}{4p^2}+\frac{y^6}{p^4},$$

ou, en simplifiant,

$$y^6-3\frac{p}{m}y^5+3p^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{m^2}\right)y^4 - \frac{p^3}{m}\left(2-\frac{1}{m^2}\right)y^3+\frac{3p^4}{2m^2}y^2-\frac{p^6}{4m^4}=0.$$

Parmi les racines de cette équation doit évidemment se trouver trois fois l'ordonnée $\frac{p}{m}$ du point de contact de la tangente (5) avec la parabole. En divisant trois fois de suite le premier membre de l'équation précédente par $y-\frac{p}{m}$, on obtient l'équation

$$y^3+\frac{3p^2}{4}y-\frac{p^3}{4m}=0,$$

dont les racines sont imaginaires. *Il y a donc trois cercles osculateurs imaginaires d'une parabole, qui touchent une tangente à cette courbe.*

Soient y_1, y_2, y_3 les ordonnées des trois points d'osculation. On a, entre ces ordonnées, les relations

$$(6)\qquad y_1+y_2+y_3=0,$$

$$(7)\qquad y_2y_3+y_3y_1+y_1y_2=0,$$

$$y_1y_2y_3=\frac{p^3}{4m}.$$

puis

$$(8) \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -\frac{3p^2}{2},$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & y_1^3 + y_2^3 - y_3^3 = -\frac{3p^3}{4m}, \\ & y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 = \frac{9p^4}{8}, \\ & y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2 = \frac{9p^4}{16}, \\ & y_2 y_3^2 + y_3 y_1^2 + y_1 y_2^2 + y_3 y_2^2 + y_1 y_3^2 + y_2 y_1^2 = \frac{3p^3}{4m}. \end{aligned} \right.$$

Les tangentes à la parabole en ces points auront pour équations

$$Y = \frac{p}{y_1} X + \frac{y_1}{2}, \quad Y = \frac{p}{y_2} X + \frac{y_2}{2}, \quad Y = \frac{p}{y_3} X + \frac{y_3}{2},$$

et l'équation générale des coniques tangentes à ces trois droites sera, en désignant par l_1, l_2, l_3 trois paramètres arbitraires,

$$\begin{aligned} & l_1^2 \left(Y - \frac{p}{y_1} X - \frac{y_1}{2} \right)^2 - 2 l_2 l_3 \left(Y - \frac{p}{y_2} X - \frac{y_2}{2} \right) \left(Y - \frac{p}{y_3} X - \frac{y_3}{2} \right) \\ + & l_2^2 \left(Y - \frac{p}{y_2} X - \frac{y_2}{2} \right)^2 - 2 l_3 l_1 \left(Y - \frac{p}{y_3} X - \frac{y_3}{2} \right) \left(Y - \frac{p}{y_1} X - \frac{y_1}{2} \right) \\ + & l_3^2 \left(Y - \frac{p}{y_3} X - \frac{y_3}{2} \right)^2 - 2 l_1 l_2 \left(Y - \frac{p}{y_1} X - \frac{y_1}{2} \right) \left(Y - \frac{p}{y_2} X - \frac{y_2}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient du terme en Y^2 est

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 2 l_2 l_3 - 2 l_3 l_1 - 2 l_1 l_2,$$

celui du terme en X^2 est

$$p^2 \left(\frac{l_1^2}{y_1^2} + \frac{l_2^2}{y_2^2} + \frac{l_3^2}{y_3^2} - 2 \frac{l_2 l_3}{y_2 y_3} - 2 \frac{l_3 l_1}{y_3 y_1} - 2 \frac{l_1 l_2}{y_1 y_2} \right),$$

et celui du terme en XY est

$$\begin{aligned} 2p \Bigg[& -\frac{l_1^2}{y_1} - \frac{l_2^2}{y_2} - \frac{l_3^2}{y_3} + l_2 l_3 \left(\frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \right) \\ & + l_3 l_1 \left(\frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_1} \right) + l_1 l_2 \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) \Bigg]. \end{aligned}$$

Or on voit immédiatement, en tenant compte des équations (6), (7) et (8), que, en prenant $l_1 = y_1$, $l_2 = y_2$, $l_3 = y_3$, les deux premiers coefficients sont égaux et le troisième est nul, de sorte que, en remplaçant l_1, l_2, l_3 par ces valeurs dans l'équation générale, on a, pour l'équation du cercle tangent aux trois droites,

$$\begin{aligned} &+3p^2(X^2+Y^2) - p(y_1^2+y_2^2+y_3^2)X \\ &\quad + (y_2y_3^2 + y_3y_1^2 + y_1y_2^2 \\ &\qquad + y_3y_2^2 + y_1y_3^2 + y_2y_1^2 - y_1^3 - y_2^3 - y_3^3)Y \\ &\qquad + \tfrac{1}{4}(y_1^4+y_2^4+y_3^4) - \tfrac{1}{2}(y_2^2y_3^2 + y_3^2y_1^2 + y_1^2y_2^2) = 0, \end{aligned}$$

ou, eu égard aux équations (8) et (9),

$$X^2 + Y^2 - \frac{p}{2}X - \frac{p}{2m}Y = 0. \tag{10}$$

et, en mettant en évidence le centre et le rayon,

$$\left(X - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(Y - \frac{p}{4m}\right)^2 = \frac{p^2(1+m^2)}{16m^2}.$$

En cherchant le carré de la distance du centre à la droite (5), on trouve

$$\frac{\left(\dfrac{p}{4m} - m\dfrac{p}{4} - \dfrac{p}{2m}\right)^2}{1+m^2} = \frac{p^2(1+m^2)}{16m^2},$$

ce qui démontre le théorème.

Le cercle (10) passe, quel que soit m, par le sommet et par le foyer de la parabole. Ch. B.

Note. — La même question a été résolue par M. Fulcrand.

Question 1457

(voir 3e série, t. II, p. 336);

PAR UN ANONYME.

Une hyperbole est tangente aux axes d'une ellipse, et les asymptotes de l'hyperbole sont tangentes à l'el-

lipse, prouver que le centre de l'hyperbole est sur l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

(Wolstenholme.)

Soient

A, B les points de contact de l'hyperbole et des axes de l'ellipse, dirigés suivant les droites rectangulaires OX, OY;

A′, B′ les points auxquels les asymptotes CX′, CY′ de l'hyperbole sont tangentes à l'ellipse;

M, M′ les milieux des cordes de contact AB, A′B′ (1).

Les centres de l'ellipse et de l'hyperbole étant, respectivement, O et C, la droite OC est un diamètre commun aux deux courbes, et ce diamètre passe par les points M, M′, d'après cette proposition générale que le diamètre mené par le point de concours de deux tangentes à une conique divise la corde des contacts en deux parties égales.

La droite AB prolongée rencontrant les asymptotes CX′, CY′ de l'hyperbole en des points D, E, tels que AD = BE, le point M est le milieu de la droite DE, inscrite comme A′B′ dans l'angle X′CY′ des asymptotes. Il est facile d'en conclure que AB est parallele à A′B′.

Actuellement remarquons que, le point M étant le milieu de l'hypoténuse AB du triangle rectangle AOB, les droites OM et AB sont également inclinées sur les axes OA, OB de l'ellipse, et, à cause du parallélisme des droites AB, A′B′, il en est de même de OM′ et A′B′, c'est-à-dire du diamètre OC et de son conjugué. Donc *le centre*, C, *de l'hyperbole est sur l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.*

Note. — M. Juhel-Renoy a donné une démonstration entièrement semblable. MM. Moret-Blanc, Ernest Barisien et J.-T., élève de Ma

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

thématiques spéciales, ont démontré la proposition au moyen des formules de la Géométrie analytique.

Question 1458

(voir 3e série, t. II, p. 336);

PAR M. MORET-BLANC.

Construire une parabole tangente à une circonférence donnée, connaissant l'axe et le paramètre de la parabole. (A.)

Il suffit de déterminer le point de contact; car la tangente et la normale communes à la circonférence détermineront sur l'axe un segment dont le milieu sera le foyer de la parabole : connaissant l'axe, le foyer et le paramètre, on pourra construire la courbe par les procédés connus.

Prenons pour axes des x et des y l'axe de la parabole et sa perpendiculaire passant par le centre de la circonférence. Il est évident qu'à toute solution correspondra une autre solution symétrique par rapport à l'axe des y : il suffit donc de considérer les paraboles ayant leur axe dirigé dans un sens déterminé que nous prendrons pour celui des abscisses positives.

Soient

p le paramètre donné;
β l'ordonnée du centre;
r le rayon du cercle;
x et y les coordonnées du point de contact de la parabole et de la circonférence.

Les triangles rectangles semblables donnent, la sous-normale étant égale à p,

$$\frac{y}{p} = \frac{\beta}{x+p},$$

d'où

$$y(x-p)=p\beta,$$

équation d'une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les droites $y=0$ et $x=-p$, et passant par le centre de la circonférence : il est donc facile d'en construire la partie utile; mais on peut opérer plus rapidement. Si l'on fait tourner autour du centre C de la circonférence une règle divisée, on déterminera les deux positions de la règle où la portion comprise entre le point C et l'une des asymptotes est égale à la partie comprise entre le second point situé sur la circonférence et l'autre asymptote : les deux points de la circonférence ainsi déterminés seront les points de contact cherchés.

Note. — La même question a été résolue par MM. Renoy et Ernest Barisien, lieutenant au 141e de ligne, à Bastia.

Question 1467

(voir 3e série, t. II, p. 384);

PAR M. MORET-BLANC.

Le nombre premier $p=2n+1$ étant supérieur à 3, la somme des puissances d'un même degré pair $2a$ comprise entre 0 et $p-1=2n$, des n entiers 1, 2, 3, ..., n et celle des puissances du même degré des n entiers suivant $n+1, n+2, \ldots, p-1=2n$ sont divisibles par p. (LIONNET.)

1° m étant un nombre entier inférieur à $p-1=2n$, la somme des puissances de degré m des $2n$ entiers 1, 2, 3, ..., $2n$ est divisible par le nombre premier $p=2n+1$.

En effet, S_m désignant la somme des puissances de degré m, des $2n$ premiers nombres, on a, pour déterminer S_m, la formule connue

$$(2n+1)[(2n+1)^m - 1] = \frac{m+1}{1} S_m$$
$$+ \frac{(m+1)m}{1.2} S_{m-1} + \ldots + \frac{(m+1)m}{1.2} S_2 - \frac{m+1}{1} S_1,$$

qui montre que, si $2n+1$ divise S_1, S_2, ..., S_{m-1}, il divisera aussi $(m+1)S_m$, et, par suite, S_m, puisque $m+1$ est plus petit que le nombre premier $2n+1$.

Or $2n+1$ divise $S_1 = n(2n+1)$: donc il divise aussi $S_2, S_3, \ldots, S_{m-1}, S_m$.

2° La différence entre la somme des puissances, d'un même degré pair $2a$, des n nombres $1, 2, 3, \ldots, n$ et celle des puissances du même degré des n nombres suivants $n+1, n+2, \ldots, 2n$ est divisible par $p = 2n+1$.

Appelons s_{2a} et s'_{2a} ces deux sommes; on a

$$s'_{2a} - s_{2a} = [(2n)^{2a} - 1^{2a}]$$
$$+ [(2n-1)^{2a} - 2^{2a}] + \ldots + [(n+1)^{2a} - n^{2a}].$$

La différence des puissances, d'un même degré pair, de deux nombres entiers étant toujours divisible par la somme de ces nombres, chacune des différences du second membre est divisible par $2n+1$; donc

$$s'_{2a} - s_{2a}$$

est divisible par $2n+1 = p$.

Or, si $2a$ est plus petit que $2n$, on a vu que

$$S_{2a} = s'_{2a} + s_{2a}$$

est aussi divisible par p; donc chacune des sommes s_{2a} et s'_{2a} est aussi divisible par p. C. Q. F. D.

Question 1473
(voir 3ᵉ série, t. II, p. 383),

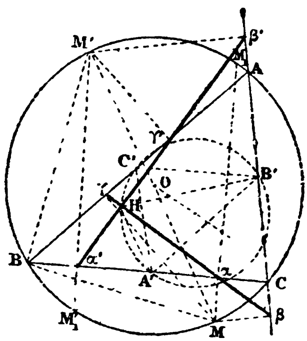
PAR M. N. GOFFART.

THÉORÈME I. — *Les deux droites de Simson, relatives à deux points diamétralement opposés, sont rectangulaires.*

THÉORÈME II. — *Le lieu du point de concours des deux droites de Simson, relatives à deux points diamétralement opposés, est le cercle des neuf points* (¹).

(N. GOFFART.)

Soient A, B, C les sommets du triangle; M, M′ les extrémités d'un diamètre de la circonférence circon-



scrite; $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, et $M'\alpha'$, $M'\beta'$, $M'\gamma'$ les perpendiculaires abaissées respectivement sur les côtés BC, CA, AB, des deux points M et M′. Soit encore H le point de concours des droites $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$.

(¹) On m'a écrit, de Londres, que ces deux théorèmes ont été, il y a quelques années, démontrés en Angleterre et en Allemagne; cela ne me fait pas regretter d'en avoir demandé la démonstration aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

Désignons par M_1 et M'_1 les points où les droites $M\alpha$, $M'\alpha'$ perpendiculaires à BC rencontrent la circonférence. On voit immédiatement que le quadrilatère $MM_1M'M'_1$ est un rectangle inscrit, et que par suite $\alpha C = \alpha' B$. Donc, si A' est le milieu de BC, c'est aussi le milieu de $\alpha\alpha'$ [1]. Pareillement, on peut poser que B', C' sont respectivement les milieux de $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Il en résulte encore

$$\text{arc } CM = BM'_1$$

et, par suite,

$$\text{angle } CM_1M = BM'M'_1 = CBM.$$

1° Le quadrilatère $M\alpha\gamma B$ étant inscriptible,

$$\text{angle } M\gamma\alpha = CBM.$$

De même $M'\alpha'\gamma'B$ est inscriptible, donc

$$\text{angle } B\gamma'\alpha' = \beta'\gamma'A = BM'M'_1;$$

donc

$$M\gamma\alpha = \beta'\gamma'A.$$

Comme, d'ailleurs, les angles $\gamma M\beta$ et $\gamma' A\beta'$ sont supplémentaires de l'angle BAC, les triangles $\gamma M\beta$, $\gamma' A\beta'$ sont équiangles. Les côtés $M\beta$, $M\gamma$ étant respectivement perpendiculaires à $A\beta'$, $A\gamma'$, il en est de même de $\beta\gamma$ et $\beta'\gamma'$. Donc les droites $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont rectangulaires.

2° Les triangles $\alpha H\alpha'$, $\beta H\beta'$, $\gamma H\gamma'$ étant rectangles, on a

$$HA' = \tfrac{1}{2}\alpha\alpha' = A'\alpha \quad \text{et} \quad HB' = \tfrac{1}{2}\beta\beta' = \beta B'.$$

Il s'ensuit

$$\text{angle } A'H\alpha = A'\alpha H = C\alpha\beta,$$
$$\text{angle } B'H\beta = H\beta B' = C\beta\alpha.$$

En additionnant, il vient

$$A'HB' = ACB = A'C'B'.$$

---

[1] A', étant la projection du milieu O de MM' sur BC, est nécessairement le milieu de la projection $\alpha\alpha'$ de MM' sur la même droite BC.

Ainsi le lieu du point H est le segment capable de l'angle $A'C'B'$ décrit sur $A'B'$; c'est la circonférence circonscrite au triangle $A'B'C'$, ou le cercle des neuf points.

Note. — La même question a été résolue par M. Jean Kartchewski, maître de l'École réale à Themirkhan-Choura (Caucase); et par MM. Droz; Moret-Blanc; Terrier; Bricard, à Vannes; J. Chapson, aspirant-répétiteur au lycée de Versailles.