NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C.-A. LAISANT

Remarque sur certaines questions de réciprocité

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 383-386

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__383_0>

REMARQUE SUR CERTAINES QUESTIONS DE RÉCIPROCITÉ;

PAR M. C.-A. LAISANT,
Docteur ès sciences.

La question 1468, proposée par M. d'Ocagne (3e série, t. II, p. 384), l'avait été précédemment par moi dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (t. VI, 1882, p. 168), ainsi que le fait remarquer une *rectification* publiée depuis.

M. Moret-Blanc en a donné une solution (p. 523) qui est évidemment incomplète.

Cette question n'a certainement pas, par elle-même, une importance qui puisse justifier une réclamation quelconque de priorité, et je ne la rappellerais même pas en ce moment, si la solution ne se prêtait à une généralisation qui me paraît digne de remarque.

Je reprends l'énoncé du *Journal de Mathématiques élémentaires,* plus concis que celui de M. d'Ocagne :

Quelles sont les heures auxquelles on peut faire permuter les deux aiguilles d'une horloge, de façon que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge?

Soit x l'une des heures cherchées. Prenons pour origine, sur le cadran, la position des aiguilles à midi, et pour unité l'heure elle-même, si bien que le tour du cadran tout entier est mesuré par 12.

La position de la petite aiguille est indiquée par x; si le nombre y indique la position de la grande aiguille, nous avons

$$(1) \qquad 12x = y - m.12.$$

Pour que la position résultant de la permutation résulte du mouvement même de l'horloge, c'est-à-dire réponde à une heure possible, il faut donc qu'on ait

$$(2)\qquad 12y = x + m.12.$$

Éliminant y entre ces deux relations, il vient

$$(3)\qquad 144x = x + m.12$$

ou

$$143x = m.12, \quad x = \frac{m.12}{143} = \frac{12k}{143}.$$

Pour obtenir toutes les heures cherchées, il faut donner à k les valeurs successives 0, 1, 2, 3, ..., 142, après quoi l'on retomberait dans les solutions déjà obtenues. Au fond, l'erreur de M. Moret-Blanc consiste à ne prendre pour ce coefficient k que onze valeurs entières 1, 14, 27, ..., 131, au lieu de 143.

Cette solution se prête à plusieurs remarques intéressantes.

Elle comprend, bien entendu, en particulier, les heures de *superposition* des aiguilles, obtenues en donnant à k les onze valeurs 0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130.

Quant aux 132 autres résultats, ils se correspondent deux à deux, et les valeurs *associées* de k, que nous appellerons k' et k'', sont telles que l'on a

$$k' \equiv 12k'' \pmod{143},$$

d'où, réciproquement,

$$k'' \equiv 12k' \pmod{143}.$$

Par exemple, à $k' = 34$ répondra $k'' = 122$. Ces deux valeurs donnent respectivement pour x, en faisant la conversion en heures et minutes,

$$2^{\mathrm{h}}\,51^{\mathrm{m}}\,\frac{27}{143} \quad \text{et} \quad 10^{\mathrm{h}}\,14^{\mathrm{m}}\,\frac{38}{143}.$$

Si donc une horloge marque $2^h 51^m \frac{27}{143}$ et si à ce moment l'on fait permuter les deux aiguilles, elle marquera exactement $10^h 14^m \frac{38}{143}$.

Si l'un des nombres k', k'' s'écrit $\alpha\beta$ dans le système de numération duodécimal, l'autre s'écrira $\beta\alpha$. Il s'ensuit nécessairement que les nombres associés à eux-mêmes sont ceux qui s'écrivent 11, 22, ..., c'est-à-dire 13, 26, ..., comme nous venons de le faire observer tout à l'heure.

La solution du problème est donnée, en somme, par la relation (3). Or cette relation est évidemment celle qui donnerait les heures de rencontre, sur un cadran, entre la petite aiguille et une autre marchant 144 fois aussi vite, c'est-à-dire 12 fois aussi vite que l'aiguille des minutes.

La question de réciprocité que nous nous sommes proposée se ramène donc à un simple problème de rencontre.

C'est cette dernière observation qui peut se généraliser d'une manière utile. Supposons une fonction $y = f(x)$ dépendant d'une variable *de même nature* x; si nous demandons de trouver les valeurs pour lesquelles x et y peuvent être permutées entre elles, tout en satisfaisant à la loi donnée, la question revient à résoudre le système d'équations

$$y = f(x),$$
$$x = f(y).$$

Mais on tire de là

$$x = f[f(x)] = f^2(x).$$

Telle est donc la solution du problème.

Or, si l'on demandait simplement pour quelles valeurs une fonction $z = \varphi(x)$ est égale à la variable indépendante, on aurait pour solution

$$x = \varphi(x).$$

Donc les deux problèmes n'en font qu'un, si nous substituons à $\varphi(x)$ la fonction $f^2(x)$.

Les développements qui précèdent, sur la question **1468**, ne représentent qu'un cas particulier de cette remarque générale sur les problèmes de réciprocité dont il s'agit.

Ces questions se prêtent d'elles-mêmes à des solutions graphiques presque évidentes, et sur lesquelles il nous semble inutile d'insister ici.