A. DE SAINT-GERMAIN

Application de la statique au calcul de divers éléments d'un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 37-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__37_1>

APPLICATION DE LA STATIQUE AU CALCUL DE DIVERS ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

On sait que, si la Mécanique doit beaucoup à la Géométrie, elle n'est pas sans lui rendre quelques services en fournissant, pour des propositions de Géométrie pure, des démonstrations simples et remarquables, au moins au point de vue philosophique; j'en veux signaler un nouvel exemple en montrant avec quelle facilité un théorème de Statique, dont on donne peu d'applications élémentaires, permet de calculer les distances de divers points remarquables d'un triangle; quelques-unes de ces distances sont données par M. Dostor dans les *Nouvelles Annales*, août 1883, comme résultant de considérations géométriques. Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Soient A, B, C, ..., F *et* T *les points d'application de forces parallèles* α, β, γ, ..., φ *et de leur résultante* τ, P *un point quelconque pris pour origine ; on a*

$$\overline{\mathrm{PT}}^2 = \frac{1}{\tau}\Sigma\alpha\overline{\mathrm{PA}}^2 - \frac{1}{\tau^2}\Sigma\alpha\beta\,\overline{\mathrm{AB}}^2. \tag{1}$$

Supposons que les forces considérées soient au nombre de trois, appliquées aux sommets d'un triangle ABC ; désignons par G et H les points de concours des médianes et des hauteurs, par O, I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits, par R, r, r_a, r_b, r_c les rayons des mêmes cercles, enfin par M le milieu du côté BC. Faisons d'abord $\alpha = \beta = \gamma = 1$; la résultante, $\tau = 3$, sera appliquée en G. Si nous plaçons l'origine P en O, OA, OB, OC seront égaux à R et l'équation (1) donnera

$$\overline{\mathrm{OG}}^2 = \frac{1}{3}\times 3\mathrm{R}^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) = \mathrm{R}^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

Pour calculer HG, il suffirait de placer l'origine P en H et de connaître AH, BH, CH ; or, si par chaque sommet de ABC je mène une parallèle au côté opposé, je forme un triangle semblable à ABC, le rapport de similitude étant 2, et AH l'homologue de MO : on aura donc $\mathrm{AH} = 2\,\mathrm{MO} = \sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}$. L'équation (1) donne alors pour HG une valeur double de OG, ce qui résulte aussi de la similitude des triangles AHG, MOG.

Faisons coïncider l'origine avec le centre I du cercle inscrit : on a

$$\overline{\mathrm{IA}}^2 = \frac{r^2}{\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{A}} = \frac{p-a}{p}bc;$$

l'équation (1) donne, en remarquant que $abc = 4Rrp$,

$$\overline{\mathrm{GI}}^2 = \frac{bc(p-a)+\ldots}{3p} - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$
$$= \frac{bc+ca+ab}{3} - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} - 4Rr.$$

On reconnaît aisément que GI_a se déduit de XGI en y changeant a en $-a$, r en $-r_a$.

Faisons maintenant les forces α, β, γ égales respectivement à a, b, c; leur résultante $a+b+c$ est, on le sait, appliquée en I; si nous prenons le point O pour origine, l'équation (1) nous donnera

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = \frac{R^2 a + R^2 b + R^2 c}{a+b+c} - \frac{bca^2+\ldots}{(a+b+c)^2}$$
$$= R^2 - \frac{abc}{a+b+c} = R^2 - 2Rr,$$

formule connue, mais très remarquable en ce qu'elle prouve que, deux cercles étant donnés, il n'est pas possible en général de construire un triangle inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre. On aurait semblablement

$$\overline{\mathrm{OI}_a}^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

Supposons enfin $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$, $\gamma = c^2$; le centre des forces parallèles est en S, au point de concours des droites que M. d'Ocagne étudie sous le nom de *symédianes* dans le numéro d'octobre 1883 des *Nouvelles Annales*. Cherchons d'abord la distance SA; si l'on fait coïncider l'origine avec le point A, l'équation (1) donne

$$\overline{\mathrm{SA}}^2 = \frac{2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$
$$= \frac{(2b^2+2c^2-a^2)b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{b^2c^2\overline{\mathrm{AG}}^2}{(a^2+b^2+c^2)^2};$$

la règle de composition des forces parallèles montre que la symédiane a pour longueur

$$\frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

L'équation (1) donnerait les distances SO, SG, ...,

$$\overline{SO}^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

$$\overline{SG}^2 = \frac{2}{3}\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}r^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{18} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Une marche toute semblable permettra de calculer la distance de deux points remarquables d'un tétraèdre, pourvu qu'on connaisse les distances de l'un d'eux aux quatre sommets et qu'on puisse regarder l'autre comme le centre de quatre forces parallèles connues appliquées aux mêmes sommets.