NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WEILL

Sur quelques courbes enveloppes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 376-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__376_1>

SUR QUELQUES COURBES ENVELOPPES;

PAR M. WEILL.

Considérons un point A qui décrit une courbe C, et faisons correspondre au point A une courbe F(A), qui dépende du point A seulement, mais non de la tangente en ce point à la courbe qu'il décrit; lorsque le point A décrit la courbe C, la courbe variable F(A) a une certaine enveloppe E.

Ceci posé, menons au point A la tangente à la courbe C, et soient A', A'', ... diverses positions du point A sur cette tangente; à ces points correspondront des courbes F(A), F(A'), ... qui admettront une certaine enveloppe $\varphi(A)$; si l'on remplace le point A par le point B, et si l'on opère de même sur le point B, on aura une enveloppe $\varphi(B)$ correspondant aux courbes F(B),

$F(B')$, ..., obtenues en déplaçant le point B sur la tangente à la courbe C menée au point B.

D'après la définition de la courbe $F(A)$, on peut, pour avoir le point où cette courbe touche son enveloppe E, donner au point A un déplacement infiniment petit sur la courbe C, ou sur n'importe quelle courbe touchant la courbe C en ce point A; en particulier, sur la tangente au point A à la courbe C; dans ce dernier cas, on voit que le point où $F(A)$ touche son enveloppe E est un point commun aux deux courbes infiniment voisines $F(A)$, $F(A')$, et, par conséquent, appartient à la courbe $\varphi(A)$; donc, enfin, la courbe E est l'une des enveloppes des courbes φ.

Ce théorème très général a des applications nombreuses; nous nous bornerons à des cas très élémentaires.

Exemple I. — Étant données trois droites fixes OA, OB, AB, un point M variable sur AB est le sommet d'un parallélogramme OCMD dont les côtés sont parallèles à OA, OB; on sait que la diagonale CD a pour enveloppe une parabole tangente en A et B aux droites fixes OA, OB.

Supposons que, OA et OB restant fixes, AB se déplace en touchant une courbe fixe en un point M; quand le point M se meut sur cette courbe, la droite CD correspondante a pour enveloppe une courbe E. D'après le principe général, cette courbe E est l'une des enveloppes des paraboles variables tangentes aux droites fixes OA, OB aux points A et B où ces droites sont rencontrées par les tangentes AB à la courbe lieu de M. Appliquons ce résultat à quelques exemples.

Premier cas. — Les droites OA, OB *étant rectangulaires*, AB touche en M un cercle ayant son centre en O;

la droite CD a pour enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements; en effet, elle est de longueur constante; donc la parabole qui touche OA, OB en A et B a pour enveloppe cette courbe; on peut remarquer que son sommet est le point où elle touche son enveloppe; donc son axe enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. De là, diverses réciproques.

Deuxième cas. — Les droites OA, OB étant rectangulaires ou obliques, AB enveloppe une hyperbole ayant pour asymptotes ces deux droites; les paraboles dont il s'agit ont pour enveloppe une hyperbole ayant les mêmes asymptotes; d'où, par transformation homographique, un théorème.

Troisième cas. — Les droites OA, OB sont l'axe et la tangente au sommet d'une parabole fixe, et AB est tangente à cette parabole; les paraboles dont il s'agit ont pour enveloppe une parabole, ayant même sommet et même axe que la première et un paramètre quadruple; d'où, par transformation homographique, un théorème.

Quatrième cas. — Les droites OA et OB sont une tangente à un cercle et le diamètre passant par le point de contact, les paraboles tangentes à ces deux droites fixes aux points où elles sont rencontrées par une tangente variable AB au cercle, ont pour enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

Exemple II. — Soit une courbe fixe C et un point fixe F; en un point M de la courbe C menons la tangente à cette courbe, et joignons F à un point variable A de la tangente, puis traçons la perpendiculaire AK à la droite AF. Lorsque le point A se meut sur la tangente, AK enveloppe une parabole ayant F pour foyer et la tangente comme tangente au sommet.

Lorsque le point M se déplace sur la courbe, les paraboles correspondantes ont pour enveloppe la courbe enveloppe des perpendiculaires menées par les différents points M aux droites FM, FM', etc. Applications :

Premier cas. — La tangente au sommet de nos paraboles variables enveloppe un cercle; l'enveloppe des paraboles est donc une conique ayant pour foyer F; on peut remarquer que le sommet a pour lieu un limaçon de Pascal ayant F pour point double. Ce théorème a diverses réciproques intéressantes.

Deuxième cas. — Des paraboles qui ont pour foyer le point double d'une strophoïde, et dont la tangente au sommet enveloppe cette courbe, ont pour enveloppe une parabole. La réciproque est la proposition suivante : Lorsqu'une parabole touche une parabole fixe et a pour foyer un point fixe pris sur la directrice, sa tangente au sommet enveloppe une strophoïde ayant ce point comme point double. Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que toute podaire négative donnera une enveloppe de paraboles.

Exemple III. — Revenant au problème de l'exemple I, supposons que l'enveloppe de CD soit une courbe connue, qu'elle touche en un point K; à une position de CD tangente en K, correspond une parabole tangente en A et B aux deux droites fixes OA, OB, le point M où la droite AB touche son enveloppe étant le sommet du parallélogramme ODMC; de plus, cette parabole touche en K la courbe enveloppe de CD; donc, de l'enveloppe des paraboles, on pourra déduire celle de la droite AB. En particulier, si l'enveloppe de CD, c'est-à-dire l'enveloppe de nos paraboles, est unicursale, il en sera de même de l'enveloppe de AB. Prenons les droites OA, OB comme axes coordonnés, et soit

$$px + qy - 1 = 0$$

l'équation de CD; on aura

$$f(p, q) = 0,$$

relation qui définira l'enveloppe de CD; l'enveloppe de AB aura pour équation

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Premier cas. — L'enveloppe de CD est une conique quelconque. L'enveloppe de AB est une courbe du quatrième degré ayant trois points doubles, dont deux à l'infini, le troisième au point O. On peut alors énoncer les deux théorèmes suivants :

Une courbe du quatrième ordre ayant trois points doubles A, B, C, *si l'on mène à cette courbe une tangente qui rencontre* AB *et* AC *en* P *et* Q, *une conique touchant* BC, *et touchant les droites* AB *et* AC *en* P *et* Q, *a pour quatrième enveloppe une conique.*

Une anallagmatique du quatrième ordre à point double étant donnée, une parabole qui a son foyer au point double de cette courbe, et pour tangente au sommet une tangente à cette courbe, a pour enveloppe une conique.

Deuxième cas. — L'enveloppe de CD est une conique qui touche en R et S les droites OA, OB. L'enveloppe de AB est alors une conique passant par R et S et ayant pour directions asymptotiques OA et OB. On en déduit le théorème suivant :

Lorsqu'une conique variable touche trois droites fixes OA, OB, PQ, *et une conique fixe tangente à* OA, OB *en* R, S, *la corde de contact* AB *de cette conique variable avec les droites fixes* OA, OB *a pour enveloppe une conique passant par* R, S *et par les points où la conique fixe rencontre* PQ.

Troisième cas. — L'enveloppe de CD est un cercle tangent aux deux droites rectangulaires OA, OB; le milieu de CD décrit alors une hyperbole ayant O pour foyer; par suite, AB enveloppe une hyperbole ayant O pour foyer; donc le foyer de la parabole qui touche OA et OB en A et B décrit un cercle, et l'on a le théorème :

Le lieu des foyers des paraboles qui touchent un cercle et deux droites rectangulaires tangentes à ce cercle est un cercle.

Exemple IV. — D'un point M d'une courbe abaissons sur deux droites rectangulaires fixes des perpendiculaires MP, MQ, et du point M la perpendiculaire MH sur PQ; lorsque M se déplace sur la tangente AMB à la courbe, MH enveloppe une parabole P_M qui touche en α, β les parallèles aux droites fixes menées par A et B, les points α, β étant sur la perpendiculaire abaissée du point O de rencontre des droites fixes sur la droite variable AB. Quand M se meut sur la courbe, les droites MH ont une enveloppe E; cette courbe est donc une des enveloppes des paraboles P_M. Soit

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1=0$$

l'équation de la tangente en M à la courbe décrite par ce point; la parabole P_M a pour équation

$$(px+qy)^2-4pq(qx+py-pq)=0;$$

p et q sont liés par une certaine relation $f(p, q)=0$. L'enveloppe des paraboles se décomposera nécessairement, en général; car nous avons immédiatement une courbe qui fait partie de cette enveloppe et qui ne la constitue pas tout entière.

On voit que le théorème général établi plus haut se traduit par une propriété analytique de décomposition de certains polynômes en facteurs, dont on aura des exemples aussi nombreux qu'on le voudra. Dans l'exemple actuel, les paraboles P_M ont pour enveloppes d'abord une courbe dépendant du lieu de M et qui est la courbe E, puis deux droites fixes qui sont les bissectrices de l'angle des deux droites rectangulaires fixes; ainsi la deuxième partie de l'enveloppe est indépendante de la courbe lieu de M; ce fait est général.

Exemple V. — On sait que, si un angle de grandeur constante tourne autour d'un point fixe, la corde interceptée par les côtés de l'angle sur deux droites fixes enveloppe une conique ayant pour foyer le point fixe; le lieu de la projection du point fixe sur cette corde est donc un cercle qui passe par les projections du point fixe sur les deux droites. Ceci posé, soit P un point fixe autour duquel nous ferons tourner un angle de grandeur constante, soit AB la corde interceptée par les côtés de l'angle sur une ou deux courbes fixes, A étant sur la courbe K, et B sur la courbe K'; menons en A et B les tangentes aux courbes K et K' respectivement et projetons le point P sur AB et sur ces deux tangentes, aux points M, R, R'.

Le cercle qui passe par M, R, R' sera tangent au point M au lieu des projections du point fixe P sur la droite AB se déplaçant suivant la loi indiquée. On connaîtra donc immédiatement une des enveloppes de ce cercle.

Ainsi, la courbe K étant une conique, A et B étant tous deux sur cette courbe et l'angle APB étant droit, le point M a pour lieu un cercle; donc le cercle MRR' aura pour une de ses enveloppes un cercle.