E. HABICH

Sur un système particulier de coordonnées curvilignes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 353-367

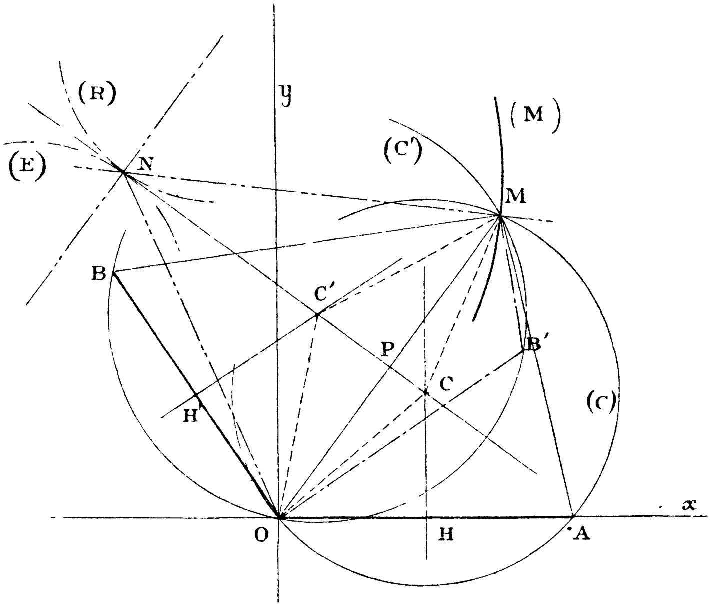
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__353_0>

SUR UN SYSTÈME PARTICULIER DE COORDONNÉES CURVILIGNES;

PAR M. E. HABICH,

Directeur de l'École spéciale des Constructions et des Mines, à Lima.

1. Soient $OA = a$ et $OB = b$ deux segments de droites, ayant la même origine O et faisant un angle $AOB = \alpha$.



Appelons λ et μ les angles OMA et OMB sous lesquels on voit, d'un point M situé dans le plan AOB, les deux segments OA et OB.

Le point M est déterminé par l'intersection de deux arcs de cercle (C) et (C′) capables des angles λ et μ et passant le premier par les points O et A, et le second par les points O et B.

Soient $r = \mathrm{MO}$ et $\theta =$ l'angle MOA les coordonnées polaires d'un point quelconque des deux cercles considérés, et, en particulier, les coordonnées du point de leur intersection M; on obtiendra des triangles OMA et OMB, en vertu de la proportionnalité des côtés avec les sinus des angles opposés,

$$r = a\,\frac{\sin(\lambda + \theta)}{\sin\lambda}, \tag{1}$$

$$r = b\,\frac{\sin(\mu + \alpha - \theta)}{\sin\mu}. \tag{2}$$

Si le segment OB avait la position OB′, on aurait à changer, dans (2), les signes des angles α et θ.

Les expressions (1) et (2) sont les équations des deux cercles coordonnés (C) et (C′).

Divisant les numérateurs développés des expressions (1) et (2) par leurs dénominateurs, on pourra les mettre sous la forme

$$\cot\lambda = \frac{r - a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{x^2 - ax + y^2}{ay}, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} \cot\mu &= \frac{r - b\cos(\alpha - \theta)}{b\sin(\alpha - \theta)} \\ &= \frac{x(x - b\cos\alpha) + y(y - b\sin\alpha)}{b(x\sin\alpha - y\cos\alpha)} \\ &\qquad (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Considérons maintenant le lieu géométrique des intersections de deux systèmes de cercles, les premiers passant par les points O, A, et les seconds par les points O, B, et capables respectivement des angles $\lambda = \mathrm{AMO}$ et $\mu = \mathrm{BMO}$, liés par une relation donnée

$$\mathrm{F}(\cot\lambda, \cot\mu) = 0. \tag{5}$$

La courbe (M) est déterminée par un système particulier de coordonnées curvilignes, constituées par les deux cercles (3), (4); son équation (5) est celle qui lie les paramètres $\cot\lambda$, $\cot\mu$, et elle est le lieu des points d'où l'on voit les deux segments OA et OB sous des angles liés par la relation (5). C'est là le système de coordonnées curvilignes que nous nous proposons d'étudier.

II. Les centres C et C′ des deux cercles coordonnés (C) et (C′) se trouvent sur des perpendiculaires CH et C′H′ menées respectivement par le milieu H de OA et le milieu H′ de OB. Le point M est symétrique de l'origine O par rapport à la droite des centres C, C′.

Soient (E) l'enveloppe des droites des centres CC′, P le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur CC′, c'est-à-dire sur la tangente de la courbe (E); on a

$$\mathrm{OM} = 2\,\mathrm{OP}.$$

La courbe (P), lieu des points P, est la *podaire* de (E), par rapport à l'origine O; il s'ensuit que la ligne (M) est semblable à la podaire (P), semblablement placée, par rapport à l'origine O, et amplifiée au double ou, si l'on veut, elle est la podaire d'une courbe semblable à l'enveloppe (E), amplifiée au double.

En transformant par rayons vecteurs réciproques la podaire (P), on trouvera la *polaire réciproque* (E′) de l'enveloppe (E). Pour effectuer cette transformation, nous remplacerons, dans les formules (3) et (4),

$$\frac{r}{2} \text{ par } \frac{\mathrm{A}^2}{r}, \quad \text{ou} \quad r \text{ par } \frac{2\mathrm{A}^2}{r} = \frac{c^2}{r},$$

ce qui donne

$$(6) \qquad \cot\lambda = \frac{c^2 - ar\cos\theta}{ar\sin\theta} = \frac{c^2 - ax}{ay},$$

$$(7) \quad \cot\mu = \frac{c^2 - br\cos(\alpha - \theta)}{br\sin(\alpha - \theta)} = \frac{c^2 - b(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}{b(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}.$$

Ainsi, connaissant la relation paramétrique (5), on pourra, en remplaçant les cotangentes de λ et de μ par leurs valeurs (6), (7), déterminer, en coordonnées polaires ou en coordonnées rectangulaires, l'équation de la polaire réciproque (E′) de l'enveloppe (E).

Les lignes coordonnées sont deux droites (6), (7), respectivement perpendiculaires aux diamètres OC et OC′ des cercles (3) et (4). Si les deux segments AO et BO appartiennent à la même droite, α sera égal à zéro ou à π, et les dénominateurs des expressions (3), (4) et (6), (7) seront des monômes contenant la seule variable y. Cela introduit des simplifications dont nous parlerons plus loin.

III. Comme l'enveloppe (E) est l'antipodaire de la podaire (P) ou la polaire réciproque de son inverse (E′), elle est complètement déterminée. Mais on peut aussi chercher son équation directement en partant de la relation paramétrique (5), comme on l'a fait pour les lignes (P), (M) et (E′).

Soient ρ et ω les coordonnées polaires d'un point quelconque de la droite des centres CC′, c'est-à-dire de la tangente à la courbe (E). On aura

$$\rho\cos(\omega-\theta) - \mathrm{OP} - \tfrac{1}{2}\mathrm{OM} = \tfrac{1}{2}r.$$

Éliminant, entre cette équation et les équations (3) et (4), premièrement le rayon vecteur r, et ensuite la $\tang\theta$, et substituant à la place des coordonnées polaires les coordonnées rectangulaires

$$\mathrm{X} = \rho\cos\omega \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} - \rho\sin\omega,$$

on trouvera, pour l'équation de la droite CC′,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\mathrm{X}(a\cot\lambda + b\cos\alpha\cot\mu - b\sin\alpha)\\ &\quad - 2\mathrm{Y}(b\cos\alpha + b\sin\alpha\cot\mu - a)\\ &\quad\quad - ab\sin\alpha(1-\cot\lambda\cot\mu)\\ &\quad\quad\quad - ab\cos\alpha(\cot\lambda + \cot\mu) = 0\end{aligned}\right.$$

Cette équation (8) est celle de la droite enveloppée CC'; elle contient les deux paramètres $\cot\lambda$ et $\cot\mu$ liés par la relation (5), et l'équation de son enveloppe est précisément celle de la courbe (E).

En résumé, connaissant la relation paramétrique (5), on pourra trouver les équations des lignes (P), (M), (E') et (E), soit en coordonnées polaires, soit en coordonnées rectangulaires, au moyen des formules (3), (4), (6), (7) et (8).

La question inverse serait, connaissant l'équation d'une de ces lignes (P), (M), (E') et (E) en coordonnées polaires ou en coordonnées rectangulaires, de chercher la relation paramétrique (5). Si l'on connaissait les équations des lignes (P), (M) et (E'), l'élimination des coordonnées x, y, ou r, θ, entre ces équations et les expressions (3), (4) ou (6), (7), donnerait la relation paramétrique qui lie les $\cot\lambda$ et $\cot\mu$. Si la courbe (E) était donnée, on considérerait ses coordonnées X, Y ou ρ, ω comme des paramètres liés par l'équation donnée de cette courbe, et l'on chercherait l'enveloppe de la ligne (8), où $\cot\lambda$ et $\cot\mu$ seraient prises pour coordonnées.

IV. Soient (R) une courbe symétrique de l'enveloppe (E), par rapport à la tangente CC'; N le point actuel de contact de la droite CC' avec la courbe (E) et, par suite, aussi avec sa symétrique (R). Supposons le point M invariablement lié à la courbe (R), et faisons-la rouler sur la courbe (E). Le point M, dans ce mouvement, décrira la courbe (M), puisque, dans toutes ses positions, il sera symétrique de l'origine O, par rapport à la tangente CC' à la courbe (E), au point commun de contact N.

Le centre instantané de rotation étant en N, la normale à la courbe (M) passe par le point où la droite des centres CC′ touche son enveloppe (E).

Supposons maintenant que l'origine O soit un foyer lumineux, et (E) une courbe réfléchissante. Comme l'angle ONP = PNM, le rayon ON émané du foyer O sera réfléchi suivant la direction NM de la normale à la courbe (M). Cette courbe (M) qui rencontre normalement les rayons réfléchis est leur *anticaustique*, et sa développée leur *caustique*.

L'identité entre les roulettes particulières considérées plus haut et les anticaustiques des rayons réfléchis a été indiquée par L'Hôpital dans son *Analyse des infiniment petits*, sect. VI, corollaire II, p. 150 de l'édition de 1768, à Avignon. Tout ce qu'on connaît sur les roulettes particulières produites par le roulement d'une courbe sur une courbe égale et symétrique, ou, ce qui est la même chose, au sujet des anticaustiques par réflexion, s'applique intégralement aux courbes (M) et (E); à leurs développées, etc.

V. Arrêtons-nous sur le cas spécial où la relation (5) entre les paramètres $\cot\lambda$ et $\cot\mu$ est algébrique.

Soit d'abord

$$A\cot\lambda - B\cot\mu + C = 0 \qquad (9)$$

une équation du premier degré par rapport aux paramètres $\cot\lambda$ et $\cot\mu$.

En éliminant $\cot\lambda$ et $\cot\mu$ entre l'équation donnée (9) et les équations (3), (4) et (6), (7), on trouvera une équation du troisième degré pour la courbe (M), et du second degré pour son inverse (E′). Comme cette courbe du second degré (E′) passe par l'origine O, sa polaire réciproque (E) est une *parabole*.

Donc, *la ligne lieu des points d'où l'on voit deux* *segments* OA *et* OB *de même origine* O, *sous des angles dont les cotangentes sont liées par une équation du premier degré, est, en général, une courbe du troisième degré* C *podaire de parabole.*

Le cas des angles égaux

$$\lambda = \mu \quad \text{ou} \quad \cot\lambda = \cot\mu$$

est évidemment compris dans l'équation (9).

Si les deux segments OA et OB appartiennent à une même droite, on a $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 0$, et la courbe (M) est un cercle passant par l'origine O; son inverse (E′) est une droite, et l'enveloppe (E) un point qui est le centre du cercle (M).

Donc, *le lieu des points d'où l'on voit deux segments consécutifs d'une même droite, sous des angles dont les cotangentes sont liées par une équation du premier degré, est un cercle passant par l'origine* O.

Sans nous arrêter sur la discussion de tous les cas particuliers qui correspondent à l'équation paramétrique (9), nous nous contenterons de remarquer que, en général, le degré des lignes (M) et (E′) est respectivement trois fois, et deux fois celui de l'équation paramétrique, et, dans le cas de deux segments d'une même droite, deux fois, et une fois celui de la même équation.

Supposons maintenant que l'équation paramétrique soit du second degré

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\cot^2\lambda + B\cot\lambda\cot\mu \\ &\quad + C\cot^2\mu + D\cot\lambda + E\cot\mu + F = 0. \end{aligned}\right.$$

La substitution des expressions (3), (4) et des expressions (6), (7), à la place des cotangentes, fait voir que l'équation de la courbe (M) sera, en général, du sixième degré, c'est-à-dire trois fois le degré de l'équation paramétrique, et l'équation de son inverse (E′) du quatrième degré, c'est-à-dire deux fois celle de l'équation paramétrique.

L'enveloppe (E), qui est la polaire réciproque de la courbe (E'), sera, par conséquent, de la quatrième classe. Si les deux segments appartiennent à la même droite, on aura, pour le degré de l'équation de la ligne (M) et de son inverse (E'), deux fois et une fois le degré de l'équation paramétrique (10), il s'ensuit que, la polaire réciproque (E') de (E) étant du second degré, l'enveloppe (E) est une conique.

Donc, *le lieu des points d'où l'on voit deux segments consécutifs d'une même droite, sous des angles dont les cotangentes sont liées par une équation complète du second degré, est une podaire de conique à centre.*

Si l'équation (10) ne contenait du second degré que le seul terme, produit des cotangentes, c'est-à-dire si les coefficients A et C étaient nuls, la courbe (E') serait une conique, et, par suite, l'enveloppe (E) serait, de même, une conique.

Donc, *le lieu des points d'où l'on voit deux segments de même origine, mais non de même direction, sous des angles dont les cotangentes sont liées par la relation*

$$B \cot\lambda \cot\mu + D \cot\lambda + E \cot\mu + F = 0$$

est une podaire de conique à centre.

Si l'on avait, dans ce dernier cas, $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ avec $b = a$ et $D = 0$ et $E = 0$, le lieu (M) serait la podaire centrale de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Si, outre les conditions précédentes, on avait $B = \pm F$, la ligne (M) serait un cercle. podaire relative au foyer d'une conique à centre.

En général, étant donnée une équation complète de degré m entre $\cot\lambda$ et $\cot\mu$, la courbe (M) sera du degré $3m$, son inverse (E′) du degré $2m$ et l'enveloppe (E) de la classe $2m$.

Si les deux segments appartenaient à la même droite, la courbe (M) serait du degré $2m$, son inverse (E′) du degré m, et l'enveloppe (E) de la classe m.

Tels sont les plus hauts degrés des équations de lignes (M), (E′) et la classe de l'enveloppe (E). Ils peuvent s'abaisser dans des cas particuliers.

Observation. — Ce que nous venons de dire au sujet du degré de l'équation d'une courbe (M) est applicable aussi au cas de deux segments qui ne partent pas d'une même origine O et qui, par conséquent, sont situés d'une manière quelconque dans le plan xOy des axes.

Comme le degré d'une ligne reste le même, quelle que soit sa position par rapport aux axes de coordonnées, il s'ensuit qu'en changeant la position des axes par rapport à un segment, l'équation du cercle coordonné (3) ou (4), qui lui correspond, ne change pas de degré, et, par conséquent, le degré de l'équation de la courbe (M) ne change pas non plus, pourvu que la relation paramétrique reste la même. Donc, en général, le degré de l'équation de la courbe (M) sera $3m$ dans le cas où l'équation paramétrique est algébrique et du degré m, quelle que soit la position des deux segments sur le plan xOy des axes.

Ainsi, par exemple, le lieu des points d'où l'on voit deux segments situés d'une manière quelconque sur le plan, sous des angles dont les cotangentes sont liées par une équation du premier degré, est une courbe du troisième degré, et un cercle si les deux segments appartiennent à une même droite.

VI. Les coordonnées circulaires que nous étudions appartiennent à la classe des *coordonnées curvilignes* *obliques*. Effectivement l'angle i formé par les deux cercles coordonnés est égal à l'angle CMC′ des deux normales MC et MC′

$$i = CMC' = COC'.$$

Mais

$$COC' = BOA - BOC' - AOC,$$

d'où

$$(11) \qquad i = \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \alpha - \pi + \lambda + \mu.$$

Si le segment OB occupe la position OB′, on a

$$(12) \qquad i = \alpha + \lambda - \mu.$$

L'angle d'intersection i de deux cercles coordonnés est égal à la somme algébrique de deux angles λ et μ à une constante près, et par suite cet angle i varie avec le déplacement du point M sur la trajectoire (M).

Cet angle $i = COC'$ est l'angle sous lequel on voit, de l'origine O, le segment CC′ de la tangente à la courbe (E), compris entre deux droites fixes CH et C′H′.

On peut dire encore que c'est l'angle sous lequel on voit de l'origine O la distance des centres C et C′ de deux cercles coordonnés.

Si l'angle i était constant, on aurait

$$\lambda + \mu = i - \alpha + \pi = \text{const} = C,$$
$$\lambda - \mu = i - \alpha = \text{const} = C,$$

d'où

$$(13) \qquad \cot\lambda \cot\mu \mp \cot C(\cot\lambda \pm \cot\mu) \mp 1 = 0.$$

Il est aisé de reconnaître, au moyen de l'équation paramétrique (13), que la courbe (M) est, dans ce cas, un cercle et de même son inverse (E′), et, par conséquent, que l'enveloppe (E) est une conique ayant l'origine O pour foyer.

Mais on peut le reconnaître directement. En effet.

comme

$$\lambda \pm \mu = \text{const.} = C,$$

il s'ensuit que la ligne (M) est un arc de cercle passant par les points A et B ou A et B' et capable de l'angle constant c. La courbe (P), semblable à (M), est un arc de cercle qui passe par les points H et H' et qui est capable du même angle c. Comme la ligne (P) est la podaire de l'enveloppe (E) et qu'elle est un cercle, il s'ensuit que cette enveloppe (E) est une conique ayant O pour foyer.

En outre, les points H et H' appartenant à la podaire (P), les droites HC et H'C' perpendiculaires à ses rayons vecteurs OH et OH' sont tangents à la courbe (E). On arrive ainsi par cette nouvelle voie au théorème connu : que l'*angle sous lequel, du foyer d'une courbe du second degré, on voit le segment d'une tangente mobile compris entre deux tangentes fixes, est constant;* et on le complète en faisant voir que les coniques sont les *seules* courbes qui jouissent de cette propriété.

VII. Dans la Topographie et surtout dans l'Hydrographie, on rencontre fréquemment le problème ayant pour objet de déterminer la position d'un point M, connaissant celle de trois points A, O, B, et les angles OMA et OMB.

Dans ce problème, auquel on donne les noms de *problème de trois points, problème de relèvement, problème de la carte,* et aussi *problème de Pothenot,* on connaît les angles λ et μ par une mesure directe, ce qui leur assigne des valeurs déterminées.

Dans nos coordonnées, les angles λ et μ sont liés par une relation (5) entre leurs cotangentes; donc, pour que ces relations puissent servir à déterminer la position d'un ou de plusieurs points, il en faut *deux*. Les points M seront, dans ce cas, déterminés par l'intersection de deux courbes (M) correspondant aux deux équations paramétriques.

On pourrait se proposer de chercher la position des points M d'où l'on voit *trois* segments donnés, sous des angles λ, μ, ν, liés par *deux* équations entre leurs cotangentes.

Si une équation entre λ et μ était relative aux deux premiers segments et une autre entre μ et ν, au deuxième et troisième segment, on obtiendrait la relation des angles μ et ν relatifs au premier et troisième segment en éliminant μ entre les deux équations données.

Ainsi, par exemple, étant données

$$\begin{aligned} A \cot\lambda + B \cot\mu + C &= 0, \\ A_1 \cot\mu + B_1 \cot\nu - C_1 &= 0, \end{aligned}$$

l'élimination de $\cot\mu$ conduirait à une relation du premier degré entre les cotangentes de μ et ν. Donc, en général, les points cherchés seraient déterminés par l'intersection de deux courbes du *troisième degré*.

La ligne du troisième degré qui correspond à la relation entre $\cot\mu$ et $\cot\nu$ passe par les points d'intersection des deux précédentes.

Si les trois segments considérés appartiennent à une même droite, les trois lignes (M) sont *trois cercles*.

Au point de vue analytique, la détermination de la valeur individuelle des trois angles λ, μ, ν demande trois équations.

On a déjà deux équations paramétriques; quant à la troisième, elle est fournie par la relation entre les angles λ, μ, ν, qui dérive de la connaissance des positions relatives de trois segments.

Ainsi, par exemple, si les trois segments étaient les trois côtés AO, BO, AB d'un triangle AOB, dans ce cas, on aurait les relations obligatoires

$$\lambda + \mu + \nu = 2\pi \quad \text{ou} \quad \lambda \pm \mu = \nu,$$

suivant que le point M serait intérieur ou extérieur au triangle.

En particulier, pour le point d'où l'on voit sous des angles égaux les trois côtés d'un triangle, on a les deux relations paramétriques

$$\lambda = \mu = \nu,$$

et, en vertu de la relation de condition,

$$\lambda = \mu = \nu = \tfrac{1}{3}2\pi = 120^\circ.$$

VIII. Quel que soit le plan conduit suivant un segment donné OA, le lieu des points de ce plan, d'où l'on voit le segment OA sous un angle donné λ, est un arc de cercle passant par les points O et A et capable de l'angle λ. Il s'ensuit que, dans l'espace, le lieu considéré est une surface de révolution ayant le segment OA pour axe de révolution et pour méridien l'arc de cercle capable de l'angle λ. C'est donc une *surface de tore*. En substituant, à la place de y, $\sqrt{y^2 + z^2}$ dans l'équation (3), on obtiendra

$$(14) \qquad \cot\lambda = \frac{x^2 - 2ax + (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{2a(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui est l'équation du tore ayant le segment OA pour axe des x et pour axe de révolution.

L'équation du tore correspondant à un segment situé d'une manière quelconque dans l'espace résultera de l'équation (14) en changeant les axes des coordonnées, ce qui ne change pas le degré de l'équation (14).

Si l'on avait une relation paramétrique

$$(15) \qquad F(\cot\lambda, \cot\mu) = 0,$$

en substituant aux cotangentes de λ et de μ les valeurs correspondantes (14), on aurait une équation entre x, y, z, qui serait celle de la surface ((M)), lieu des points d'où l'on voit les deux segments considérés sous des angles liés par la relation (15).

Remarquons que la surface considérée ((M)) est le lieu des lignes d'intersection des tores correspondant aux angles λ et μ liés par la relation (15).

Si l'on avait deux relations de la forme (15), on aurait deux surfaces ((M)), et la courbe d'intersection de ces deux surfaces satisferait à la condition que de ses points on voie les deux segments donnés sous des angles donnés λ et μ. Cette courbe est aussi celle de l'intersection de deux surfaces de tore correspondant aux valeurs bien déterminées des angles λ et μ.

Pour que la position du point M dans l'espace soit déterminée, il faut connaître, au moins, trois équations entre trois angles λ, μ, ν, sous lesquels on doit voir les trois segments donnés. Le point M est, dans ce cas, déterminé par l'intersection de trois surfaces.

Il y aurait à considérer le cas où les trois segments AO, BO, AB forment les trois côtés d'un triangle et avec le point M un tétraèdre, ayant le triangle des segments pour base et le point M pour sommet.

On a dans ce cas entre les angles la relation

$$\mathrm{AMO} + \mathrm{BMO} > \mathrm{AMB},$$

ce qui signifie que les trois points A, O, B ne se trouvent pas sur une même droite. Dans ce dernier cas, le problème serait indéterminé : le lieu du point M serait un cercle perpendiculaire à l'axe commun de révolution.

On pourrait encore chercher à déterminer la position d'un point M, par rapport à *quatre* segments donnés, au moyen de *trois* relations entre les cotangentes des quatre angles sous lesquels on voit du point M ces quatre segments.

Par ce que nous venons de dire, on voit que, dans le cas général de l'espace, les surfaces coordonnées sont des *surfaces de tore*, ayant les segments donnés pour axes de révolution et pour *méridiens* des arcs de cercle, capables des angles sous lesquels on doit voir ces segments.

Le *problème de relèvement* passe ainsi du plan à l'espace, c'est-à-dire de la Topographie et de l'Hydrographie, à la Navigation aérienne.