Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 342-351

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__342_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1469

(voir 3e série, t. II, p. 431);

PAR M. E. CATALAN.

a, b étant des nombres entiers, la quantité

$$\frac{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{2n-1}+\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{2n-1}}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

est la somme de deux carrés, et aussi la somme de trois carrés $(n \overline{\gtrless} 2)$.

I. Soient

$$\alpha = a+\sqrt{a^2+b^2}, \quad \beta = -a+\sqrt{a^2+b^2}.$$

On a, *identiquement,*

$$(1)\quad \frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta}=\left(\frac{\alpha^n\pm\beta^n}{\alpha+\beta}\right)^2+\left(b\,\frac{\alpha^{n-1}\mp\beta^{n-1}}{\alpha+\beta}\right)^2 \text{ (1)}.$$

En effet, si l'on chasse les dénominateurs, cette égalité devient

$$\begin{aligned}&(\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1})(\alpha+\beta)\\&\quad=\alpha^{2n}\pm 2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}+\alpha\beta(\alpha^{2n-2}\mp 2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}+\beta^{2n-2})\\&\quad=\alpha^{2n}+\beta^{2n}+\alpha^{2n-1}\beta+\alpha\beta^{2n-1};\end{aligned}$$

ce qui est exact.

Il reste à prouver que chacun des termes, dans l'identité (1), est un *nombre entier*.

Considérons, par exemple, la fraction

$$\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha+\beta}=\frac{(a+\sqrt{a^2+b^2})^n+(-a+\sqrt{a^2+b^2})^n}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Si, comme on l'a supposé, n est *impair,* cette quantité se réduit à

$$\frac{n}{1}a^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(a^2+b^2)+\ldots+(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

et celle-ci est un *nombre entier*.

Le *premier théorème* est donc démontré.

II. *Remarque.* — Si α, β sont des nombres entiers, pris arbitrairement, le premier membre de l'égalité (1) peut n'être point la somme de deux carrés.

Exemple :

$$\frac{3^3+1}{3+1}=7.$$

---

(1) Les signes supérieurs, si n est *impair*.

III. D'après l'identité (1) :

1° Si n est *impair*,

$$\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha+\beta}=f^2+g^2.$$

Donc

$$\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha+\beta}\right)^2=(f^2+g^2)^2=(f^2-g^2)^2+(2fg)^2.$$

2° Si n est *pair*, et supérieur à 2,

$$\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{\alpha+\beta}=f^2+g^2;$$

puis

$$\left(b\,\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{\alpha+\beta}\right)^2=b^2(f^2-g^2)^2+(2bfg)^2.$$

Dans les deux cas, *la quantité*

$$\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta}$$

est une somme de trois carrés.

IV. *Application.* $a=2$, $b=3$, $\alpha=2+\sqrt{13}$, $\beta=-2+\sqrt{13}$, $n=3$.

On trouve :

$$1^\circ\quad \frac{\alpha^5+\beta^5}{\alpha+\beta}=769$$
$$=\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}\right)^2+\left(b\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}\right)^2=35^2+12^2;$$

$$2^\circ\quad \left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}\right)^2=7^2+24^2;$$

$$769=7^2+24^2+12^2.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Goffart; Genty.

Question 1474

(voir 3e série, t. II, p. 479);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

a, x, y étant des nombres entiers, chaque valeur de x qui vérifie l'équation

$$(a^2+1)x^2 = y^2+1$$

est la somme de trois carrés. Il y a exception pour $x = 1$ et pour $x = 4a^2+1$.

(E. CATALAN.)

Cette proposition est la conséquence immédiate d'un théorème communiqué par M. de Jonquières à M. Gerono, et inséré dans le numéro de mai 1878 (p. 220) des *Nouvelles Annales*; en voici l'énoncé :

THÉORÈME. — *Si l'on représente par $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite de rang n $\left(\text{la première étant, selon l'usage, } \frac{1}{0}\right)$ de la fraction continue suivant laquelle se développe la racine carrée de a^2+1 (a étant un nombre entier), on a les deux relations*

$$P_{2n} = P_n . Q_n + P_{n+1} . Q_{n+1},$$
$$Q_{2n} = \overline{Q_n}^2 + \overline{Q_{n+1}}^2.$$

Or, l'équation proposée est de la forme

$$y^2 - Ax^2 = -1,$$

et l'on sait que, lorsqu'une équation de cette forme est résoluble en nombres entiers, toutes ses solutions sont données par les deux termes des réduites de rang pair $\left(\text{la première étant } \frac{1}{0}\right)$, dans le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue. On a donc ici

$$x = Q_{2n} = \overline{Q_n}^2 + \overline{Q_{n+1}}^2.$$

Mais des deux termes Q_n, Q_{n+1}, l'un est nécessairement de rang pair et, par suite, égal à une somme de deux carrés; donc $\overline{Q_n}^2$ ou $\overline{Q_{n+1}}^2$ est aussi une somme de deux carrés. Donc enfin Q_{2n} est une somme de trois carrés. Il y a exception pour $n = 1$ et $n = 2$.

En effet, pour $n = 1$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1$ et $x = 1$; pour $n = 2$, $Q_2 = 1$, $Q_3 = 2a$ et $x = 1 + 4a^2$.

Question 1475

(voir 3e série, t. II, p. 479);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + 1.$$

(E. CATALAN.)

On obtiendra une infinité de solutions de cette équation au moyen des deux identités suivantes, faciles à vérifier,

$$(2\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha + 1)^2 + (2\alpha)^2 + 1,$$
$$(2\alpha^2 + 1)^2 + (\beta^2 - 1)^2 = (2\alpha^2 - \beta^2 + 1)^2 + (2\alpha\beta)^2 + 1.$$

Mais il est probable que ces identités ne donnent pas toutes les solutions possibles.

Note. — M. Moret-Blanc indique une infinité d'autres solutions. On vérifie, d'ailleurs, l'équation proposée en faisant $y = 1$,

$$x = p^2 + q^2, \quad u = p^2 - q^2, \quad v = 2pq,$$

p et q étant des nombres entiers quelconques.

Question 1480

(voir 3e série, t. II, p. 480);

PAR M. E. CATALAN.

THÉORÈME. — *La somme des puissances* $4n$, *de deux nombres entiers, inégaux, est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.*

La propriété énoncée résulte, immédiatement, de l'identité

$$x^{4n}+y^{4n}=\left(\frac{x^{2n+2}\pm y^{2n+2}}{x^2+y^2}\right)^2 + 2\left(xy\,\frac{x^{2n}\mp y^{2n}}{x^2+y^2}\right)^2+\left(x^2y^2\,\frac{x^{2n-2}\pm y^{2n-2}}{x^2+y^2}\right)^2,$$

dont la vérification est facile [1]. D'ailleurs, pour que toutes les fractions se réduisent à des nombres entiers, on doit prendre les *signes supérieurs* si n est *pair*. Enfin, n doit surpasser 1.

Application. Soient $n=8$, $x=2$, $y=1$:

$$\begin{aligned}2^{32}+1&=\left(\frac{2^{18}+1}{2^2-1}\right)^2+2\left(2.\frac{2^{16}-1}{2^2+1}\right)^2+\left(4.\frac{2^{14}+1}{2^2+1}\right)^2\\&=\left(\frac{262\,145}{5}\right)^2+2\left(2.\frac{65\,535}{5}\right)^2+\left(4.\frac{16\,385}{5}\right)^2\\&=52\,429^2+2.26\,214^2+13\,108^2\\&=2\,748\,800\,041+2.687\,173\,796+171\,819\,664,\end{aligned}$$

ou

$$2^{32}+1=4\,294\,967\,297,$$

résultat connu [2].

---

[1] Pour l'effectuer, il suffit de faire disparaître les dénominateurs, et de développer les carrés des quatre binômes.

[2] LEGENDRE. *Théorie des Nombres*, t. I, p. 223.

Question 1481

(voir 3e série, t. II, p. 528);

PAR UN ANONYME.

Résoudre les équations

$$(1)\qquad x^4 - x^3\sqrt{15} + 4x^2 - 1 = 0,$$

$$(2)\qquad x^4 - x^3\sqrt{3} - 2x^2 + 2x\sqrt{3} - 1 = 0.$$

Interpréter leurs racines.

(GOFFART.)

I *Résolution des équations proposées.* — En appliquant à ces équations les méthodes qui déterminent les racines communes, on trouve que leurs premiers membres ont pour plus grand commun diviseur

$$x^2 - x\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et qu'on a identiquement

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &x^4 - x^3\sqrt{15} + 4x^2 - 1\\ &\quad = \left[x^2 - x\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\\ &\quad\quad \times\left[x^2 + x\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \end{aligned}\right.$$

et

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &x^4 - x^3\sqrt{3} - 2x^2 + 2x\sqrt{3} - 1\\ &\quad = \left[x^2 - x\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\\ &\quad\quad \times\left[x^2 - x\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]. \end{aligned}\right.$$

La résolution des équations (1) et (2) est ainsi ramenée à celle d'équations du second degré.

Les racines de l'équation (1) proposée sont

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

L'équation (2) a pour racines

$$x_1,\quad x_2,\quad -x_3,\quad -x_4.$$

II. *Interprétation des racines obtenues.* — La racine $-x_4$ représente le côté du pentédécagone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est pris pour unité; car ce côté a pour valeur

$$2\sin\frac{\pi}{15} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{4} = -x_4.$$

Il résulte encore des formules de la Trigonométrie que les racines x_1, x_2, x_3 sont respectivement égales à

$$2\sin\frac{8\pi}{15},\quad 2\sin\frac{2\pi}{15},\quad 2\sin\frac{4\pi}{15},$$

c'est-à-dire égales aux côtés des trois pentédécagones étoilés.

Note. — M. H. Plamenevsky, maître à l'École reale Temir-Chanchoura (Caucase), a résolu directement chacune des deux équations proposées et trouvé ainsi les racines qui leur sont communes, au moyen de calculs assez étendus pour qu'il ne nous soit pas possible, faute d'espace, de les reproduire ici. Quant à l'interprétation des racines obtenues, l'auteur de cette solution remarque seulement qu'elles sont les abscisses des points d'intersection d'un cercle et de deux paraboles dont il fait connaître les équations.

Les mêmes équations ont aussi été résolues par MM. Moret-Blanc, et X..., mathém. élém. à Rouen, qui ont remarqué, tous deux, que les racines de ces équations représentent les côtés des quatre pentédécagones inscrits dans un cercle de rayon égal à l'unité.

Question 1482

(voir 3e série, t. II, p. 528);

PAR M. MORET-BLANC.

OA *et* OB *étant deux droites fixes quelconques, on considère une ellipse variable tangente à* OA *au point* O, *ayant une courbure constante en ce point et dont un foyer reste constamment sur* OB. *Démontrer que le grand axe de cette ellipse passe par un point fixe.*

(D'OCAGNE.)

Soit C le centre de courbure fixe situé sur la normale commune.

Abaissons CM perpendiculaire sur OB et MN perpendiculaire sur OC : quelle que soit l'ellipse variable, le point N appartient à l'axe focal. Cela résulte immédiatement de la construction connue par laquelle on détermine le centre de courbure d'un point donné d'une ellipse, et qui n'est autre que l'inverse de la précédente.

Remarque. — Soit fait l'angle COD = COB : une droite menée par N coupe OB et OD en deux points F, F', qui sont les foyers d'une conique tangente à OA au point O, et ayant en ce point pour rayon de courbure OC. La conique est une ellipse ou une hyperbole suivant que F et F' sont du même côté ou de côtés différents de OA. Si la droite menée par le point N est parallèle à l'une des droites OB, OD, la conique est une parabole ayant son foyer sur l'autre.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Droz; N. Goffart; Sequestre; E. Barisien; A. Tissier, à Poitiers; Henri Bourget; L. B., qui a donné une démonstration analytique, et par un Anonyme.

MM. Sequestre et Barisien remarquent que le théorème énoncé est vrai pour une conique quelconque.

M. Goffart fait observer qu'on aurait pu énoncer aussi ce théorème :

Une ellipse est tangente au point O, *à une droite* OA, *où sa courbure est constante; son grand axe passe par un point fixe pris sur le rayon de courbure du point* O. *Démontrer que les foyers décrivent des droites fixes.*

Ces droites passent au point O, et sont symétriques, par rapport à OA.