NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. MARGERIE

Calcul à $\frac{1}{10^n}$ près des racines incommensurables d'une équation numérique dont toutes les racines sont réelles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 33-37

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__33_1>

CALCUL A $\frac{1}{10^n}$ PRÈS DES RACINES INCOMMENSURABLES D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES;

PAR M. C. MARGERIE.

1. *Calcul de la plus grande racine positive.* — Soit l'équation

$$f(x) = 0,$$

dont toutes les racines sont réelles.

Si λ_1 est la limite supérieure de ses racines positives calculée par la *méthode de Newton*, $\lambda_1 - 1$ est la partie entière α de la plus grande racine positive A.

L'équation

$$\varphi(y) = f(y + \alpha) = 0$$

n'a qu'une racine positive égale à $A - \alpha$, et la racine positive de l'équation

$$\psi(z) = \varphi\left(\frac{z}{10}\right) = 0$$

a pour partie entière le chiffre β des dixièmes de A écrite sous forme décimale. Si λ_2 est le plus petit nombre entier rendant $\psi(z)$ positif, $\beta = \lambda_2 - 1$.

L'équation

$$\chi(t) = \psi(z + \beta) = 0$$

n'a qu'une racine positive dont la partie entière est nulle et dont le chiffre des dixièmes est le chiffre des centièmes γ de A.

γ sera donc le chiffre des unités simples de la racine positive de l'équation

$$\xi(u) = \chi\left(\frac{u}{10}\right) = 0$$

et s'obtiendra en diminuant de l'unité le plus petit nombre entier qui rend $\xi(u)$ positif.

On calculera ainsi successivement les chiffres des différentes unités décimales qui entrent dans A.

Remarque. — En prenant la partie entière de la racine positive de l'équation

$$\psi_1(z_1) = \varphi\left(\frac{z_1}{10^m}\right) = 0,$$

on aurait le nombre formé par l'ensemble des m premiers chiffres décimaux de A; mais, pratiquement, ce nombre serait difficile à trouver. Il faut opérer comme nous l'avons indiqué.

2. *Calcul de la plus petite racine positive.* — Si a est la plus petite racine positive de

$$f(x) = 0,$$

et A_1 la plus grande racine positive de

$$f_1(x_1) = f\left(\frac{1}{z_1}\right) = 0,$$

on a

$$a = \frac{1}{A_1},$$

et si l'on veut a avec p chiffres exacts, par défaut, on calculera A_1 avec $p+1$ chiffres exacts par excès.

3. *Calcul d'une racine positive quelconque.* — Soit ρ la plus petite racine de l'équation

$$f(x) = 0$$

supérieure au nombre positif p.

$\rho - p$ sera la plus petite racine positive de l'équation

$$\zeta(w) = f(w + p) = 0.$$

La connaissance de cette racine conduira à la valeur de ρ.

4. *Calcul des racines négatives.* — On calculera les racines positives de la transformée en $-x$, et l'on affectera les racines trouvées du signe $-$.

5. *Première application.* — Calcul à $\frac{1}{10^3}$ par défaut de la plus grande racine positive A de l'équation

$$f = x^3 - 5x^2 - 14x - 8 = 0.$$

α. *Recherche de la partie entière.*

$$\begin{array}{lll} f & = x^3 - 5x^2 - 14x - 8 & 8, \\ f' & = 3x^2 - 10x - 14 & 5, \\ f'' & = 2(3x - 5) & 2, \\ f''' & = 6. & \end{array}$$

Partie entière : $8 - 1 = 7$.

β. *Recherche du chiffre des dixièmes.*

$$\varphi(y) = f(y + 7) = y^3 + 16y^2 + 63y - 8 = 0,$$

$$\varphi_1(z) = \varphi\left(\frac{z}{10}\right) = z^3 + 160z^2 + 6300z - 8000 = 0;$$

2 rend $\varphi_1(z)$ positif, donc le chiffre des dixièmes est 1.

γ. *Recherche du chiffre des centièmes.*

$$\psi(t) = \varphi_1(t+1) = t^3 + 163t^2 + 6623t - 1539 = 0,$$

$$\psi_1(u) = \psi\left(\frac{u}{10}\right) = u^3 + 1630u^2 + 662300u - 1539000 = 0.$$

3 rend $\psi_1(u)$ positif, donc le chiffre des centièmes est 2.

δ. *Recherche du chiffre des millièmes.*

$$\chi(v) = \psi_1(v+2) = v^3 + 3266v^2 + 668832v - 207872 = 0,$$

$$\chi_1(w) = \chi\left(\frac{w}{10}\right)$$
$$= w^3 + 32660w^2 + 66883200w - 207872000 = 0.$$

4 rend $\chi_1(w)$ positif, donc le chiffre des millièmes est 3.

La racine cherchée a pour valeur $7,123$ à $\frac{1}{10^3}$ par défaut.

6. *Seconde application.* — L'équation

$$f = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 3x - 4 = 0$$

a une racine ρ comprise entre 2 et 3, calculer cette racine à $\frac{1}{100}$ près par défaut.

$$\varphi(y) = f(y+2) = y^4 + y^3 - 5y^2 - 3y + 2 = 0,$$

$$\psi(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 2z^4 - 3z^3 - 5z^2 + z + 1 = 0;$$

si a est la plus grande racine de $\psi(z)$,

$$\rho = 2 + \frac{1}{a}.$$

Il faut calculer a avec trois chiffres exacts, par excès.

α. *Calcul de la partie entière de a.*

$\psi = 2z^4 - 3z^3 - 5z^2 + z + 1$	3,
$\psi' = 8z^3 - 9z^2 - 10z + 1$	2,
$\psi'' = 2(12z^2 - 9z - 5)$	2,
$\psi''' = 6(8z - 3)$	1.

La partie entière de a est $3 - 1$ ou 2.

β. *Calcul du chiffre des dixièmes de a.*

$$\chi(t) = \psi(t+2) = 2t^4 + 13t^3 + 25t^2 + 9t - 9 = 0,$$

$$\chi_1(u) = \chi\left(\frac{u}{10}\right) = 2u^4 + 130u^3 + 2500u^2 + 9000u - 90000 = 0.$$

5 rend $\chi_1(u)$ positif, le chiffre des dixièmes de a est 4.

γ. *Calcul du chiffre des centièmes de a.*

$$\xi(v) = \chi_1(v+4) = 2v^4 + 162v^3 + 4252v^2 + 35752v - 5168 = 0,$$

$$\xi_1(w) = \xi\left(\frac{w}{10}\right) = 2w^4 + 1620w^3 + 425200w^2$$
$$+ 35752000w - 51680000 = 0;$$

2 rend $\xi_1(w)$ positif, donc 2 est le chiffre des centièmes de a, par excès.

$$\rho = 2 + \frac{1}{2,42} = 2,41.$$