LASER

Sur une question de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 332-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__332_1>

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. LASER.

Dans son *Cours de Géométrie,* Bobillier [2] a proposé comme exercice le problème suivant, dont il n'a pas donné la solution :

Diviser un triangle par des perpendiculaires tirées d'un point intérieur sur les côtés en trois quadrilatères équivalents.

Soient :

α, β, γ les angles dont les sommets sont A, B, C;

---

[1] Voir, pour l'origine de la question, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. III, p. 306, un article de M. MOUTARD et l'ouvrage de M. DARBOUX : *Sur une classe remarquable*, etc., p. 113 et 136.

[2] Édition de 1880, p. 189.

a, b, c les côtés opposés;
O le point cherché.

Prenons d'abord pour axes des x et des y les directions de AB, AC; et, pour plus de simplicité, supposons c égal à l'unité.

En décomposant le quadrilatère correspondant à A en un parallélogramme par des parallèles aux axes menées par le point O, et en deux triangles, et en exprimant que l'expression de l'aire obtenue est égale à $\frac{1}{3}\frac{b\sin\alpha}{2}$, on trouve

$$(1)\qquad y^2+x^2+\frac{2xy}{\cos\alpha}=\frac{b}{3\cos\alpha}=\frac{\sin\beta}{3\cos\alpha\sin\gamma}.$$

Si nous prenons maintenant BA, BC pour axes des x' et y', nous avons, de la même manière,

$$y'^2+x'^2+\frac{2x'y'}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{3\cos\beta\sin\gamma}.$$

Changeons maintenant la direction de la partie positive de l'axe des x' et remplaçons ensuite x' par $x'-1$, de manière à ramener l'origine en A; il vient

$$y'^2+x'^2-\frac{2x'y'}{\cos\beta}+\frac{2y'}{\cos\beta}-2x'=\frac{\sin\alpha}{3\cos\beta\sin\gamma}-1;$$

mais on voit sans peine que

$$y'=\frac{y\sin\alpha}{\sin\beta},\quad x'=x+\frac{y\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=x+\frac{y\sin\gamma}{\sin\beta},$$

et l'équation précédente devient

$$\begin{aligned}&\left(\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-\frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\beta}\right)\frac{y^2}{\sin^2\beta}+x^2\\&\quad+\frac{2}{\sin\beta}\left(\sin\gamma-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)xy\\&\qquad-\frac{2}{\sin\beta}\left(\sin\gamma-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)y-2x=\frac{\sin\alpha}{3\cos\beta\sin\gamma}-1.\end{aligned}$$

En remplaçant, dans le coefficient de y^2, $\sin\gamma$ par

$$\sin(\alpha+\beta),$$

et, dans les coefficients de xy et x, $\sin\gamma\cos\beta$ par

$$-\sin\gamma\cos(\alpha+\gamma),$$

il vient, en réduisant,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\tang\beta)y^2\\ &\quad+x^2-\frac{2\cos\gamma}{\cos\beta}xy+\frac{2\cos\gamma}{\cos\beta}y-2x\\ &\quad=\frac{\sin\alpha}{3\cos\beta\sin\gamma}-1.\end{aligned}\right.$$

En éliminant x^2 au moyen de l'équation (1), on trouve

$$\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\beta}y^2+\left(\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)xy-\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}y+x$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\sin\alpha}{6\cos\beta\sin\gamma}+\frac{\sin\beta}{6\cos\alpha\sin\gamma}$$

ou encore

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\beta}y^2+\frac{\sin\gamma\tang\alpha}{\cos\beta}xy-\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}y+x\\ &\quad=\frac{1}{2}-\frac{\sin\alpha}{6\cos\beta\sin\gamma}+\frac{\sin\beta}{6\cos\alpha\sin\gamma}.\end{aligned}\right.$$

Nous allons examiner deux cas particuliers :

1° *Triangle isoscèle.* — $\gamma=\beta$, $\alpha=180°-2\beta$.

On doit avoir évidemment $y=x$ et l'équation (1) donne

$$(4)\qquad y=\sqrt{\frac{1}{6(1+\cos\alpha)}}.$$

Il s'agit maintenant de s'assurer que l'équation (3) est satisfaite par cette valeur. Or, en y faisant seulement

$y = x$, $\gamma = \beta$, on trouve

$$y^2 \sin\alpha \operatorname{tang}\beta = \tfrac{1}{6};$$

d'où, en vertu de la valeur (4),

$$\sin\alpha \cot\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha,$$

ce qui est bien une identité.

Si le triangle est rectangle, $\alpha = 90°$, d'où

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{6}};$$

s'il est équilatéral, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, d'où

$$y = \tfrac{1}{3},$$

comme on devait s'y attendre.

Ainsi, dans le cas particulier dont il s'agit, la solution du problème rentre dans le domaine de la Géométrie élémentaire.

2° *Triangle rectangle.* — $\alpha = 90$, $\gamma = 90° - \beta$.

L'équation (1) donne

$$(5) \qquad x = \frac{\operatorname{tang}\beta}{6y},$$

et l'équation (2)

$$-y^2 + x^2 - 2xy \operatorname{tang}\beta + 2y \operatorname{tang}\beta - 2x = \frac{1}{3\cos^2\beta} - 1,$$

ou, en remplaçant xy par sa valeur déduite de l'équation (5),

$$-y^2 + x^2 + y^2 \operatorname{tang}\beta - 2x = \tfrac{2}{3}(\operatorname{tang}^2\beta - 1),$$

et en éliminant x au moyen de la même équation, et posant $\operatorname{tang}\beta = \varepsilon$

$$36y^4 - 72\varepsilon y^3 + 24(\varepsilon^2 - 1)y^2 + 12\varepsilon y - \varepsilon^2 = 0,$$

équation qui, renfermant l'arbitraire ε, n'est généralement pas décomposable en deux facteurs du second degré. On voit ainsi que, même dans le cas particulier du triangle rectangle non isoscèle, le problème n'est pas soluble par la règle et le compas, et *a fortiori* dans le cas général.