NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WEILL

# Sur les coniques qui coupent à angle droit une conique donnée

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 3 (1884), p. 320-321

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__320_1>

# SUR LES CONIQUES QUI COUPENT A ANGLE DROIT UNE CONIQUE DONNÉE;

PAR M. WEILL.

Soient

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et

$$\varphi = Ax^2 + 2Bxy + \ldots + F = 0$$

les équations de deux coniques. Si ces deux courbes se coupent à angle droit en tous leurs points communs, on aura, entre les coordonnées $x$ et $y$ d'un quelconque de ces points, la relation

$$b^2 x(Ax + By + D) + a^2 y(Bx + Cy + E) = 0.$$

Si l'on considère, dans cette relation, $x$ et $y$ comme coordonnées courantes, elle représentera une conique passant par les points communs aux deux premières; donc on pourra identifier cette relation avec le polynôme $\lambda f + \mu\varphi$, ce qui donne

$$(b^2 - \mu)A = \frac{\lambda}{a^2}, \quad (a^2 - \mu)C = \frac{\lambda}{b^2},$$

$$(a^2 + b^2 - 2\mu)B = 0,$$

$$(b^2 - 2\mu)D = 0, \quad (a^2 - 2\mu)E = 0, \quad \mu F - \lambda = 0.$$

Ces équations ont quatre systèmes de solutions entièrement distincts, et l'on a ainsi quatre séries de coniques coupant l'ellipse $f=0$ à angle droit; leurs équations sont, K étant une arbitraire,

$$\frac{x^2}{2b^2-a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\mathrm{K}y+1=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2a^2-b^2}+\mathrm{K}x+1=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\mathrm{K}xy-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mathrm{K}}-\frac{y^2}{b^2+\mathrm{K}}-1=0.$$

Les trois premières représentent respectivement des coniques passant par quatre points fixes, à distance finie ou infinie, et la quatrième des coniques homofocales à l'ellipse donnée.

On voit que, par un point du plan, on peut mener cinq coniques coupant à angle droit une conique donnée; deux d'entre elles sont les coniques homofocales à la conique donnée, et les trois autres se construisent *linéairement*.

En transformant les propriétés précédentes par rayons vecteurs réciproques, on en déduit les systèmes de courbes du quatrième degré, ayant trois points doubles communs, dont deux sont les ombilics du plan, et se coupant à angle droit.

On traiterait de la même manière le problème des coniques coupant une conique donnée sous un angle donné V ou son supplément, en tous leurs points communs; mais les formules compliquées auxquelles on arrive paraissent peu intéressantes.

---