SEQUESTRE

Question de licence (Caen, 1880)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 318-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__318_1>

QUESTION DE LICENCE (CAEN, 1880);

PAR M. SEQUESTRE,
Maître répétiteur au lycée d'Angoulême.

Trouver le lieu des foyers d'une hyperbole dont on connaît un sommet et une asymptote.

Je prends cette asymptote pour axe des x, et une perpendiculaire abaissée du sommet sur l'asymptote pour axe des y. Soit, de plus, β l'ordonnée du sommet;

$$(1) \qquad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(mx+ny+h)^2=0$$

est l'équation générale des courbes du second degré, ayant le point x_1, y_1 pour foyer, et pour directrice correspondante la droite $mx+ny+h=0$.

En exprimant que l'axe des x est asymptote, on a

$$1-m^2=0 \quad \text{et} \quad x_1-mh=0,$$

d'où

$$m=\pm 1 \quad \text{et} \quad h=\mp x_1;$$

ou, en prenant pour m le signe $+$, le signe $-$ devant conduire évidemment aux mêmes résultats,

$$m=1, \quad h=-x_1.$$

La tangente au sommet a pour coefficient angulaire

$\frac{n\beta}{\beta - y_1 - n^2\beta + nx_1}$; en exprimant qu'elle est parallèle à la directrice dont le coefficient angulaire est $-\frac{1}{n}$, il vient

$$\frac{n\beta}{\beta - y_1 - n^2\beta + nx_1} = -\frac{1}{n},$$

d'où

$$n = \frac{y_1 - \beta}{x_1}.$$

Portant ces valeurs de m, n et h dans l'équation (1), elle devient

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \left(x + \frac{y_1 - \beta}{x_1} y - x_1\right)^2 = 0.$$

En exprimant que la courbe passe au sommet $(0, \beta)$, on a

$$(y - \beta)[(y + \beta)x^2 - \beta^2(y - \beta)] = 0,$$

et, en supprimant la solution évidemment étrangère $y - \beta = 0$, il vient, pour l'équation du lieu,

$$(y + \beta)x^2 - \beta^2(y - \beta) = 0 \text{ [1]}.$$

---

[1] Cette équation résulte assez simplement de la proposition suivante, qui est connue :

Si d'un foyer F *de l'hyperbole on abaisse une perpendiculaire* FH *sur une asymptote, on a, en nommant a, b les demi-axes et* C *le centre de la courbe,* CH $= a$, FH $= b$.

Cela étant, soit SG $= \beta$ la perpendiculaire menée du sommet donné S sur l'asymptote. La similitude des triangles rectangles CSG, CFH donne d'abord

$$\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SG}} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FH}}, \quad \frac{a}{\beta} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b},$$

d'où

$$a^2b^2 = \beta^2(a^2 + b^2), \quad a^2(b^2 - \beta^2) = b^2\beta^2, \quad \frac{a^2}{b^2}(b^2 - \beta^2) = \beta^2.$$

En outre,

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HF}} = \frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HF} - \mathrm{SG}}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{b - \beta}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{x^2}{(b - \beta)^2}(b^2 - \beta^2) = \beta^2, \quad \frac{x^2(b + \beta)}{b - \beta} = \beta^2.$$

Mais $b = y$, donc

$$x^2(y + \beta) - \beta^2(y - \beta) = 0. \qquad \text{(G.)}$$

C'est l'équation d'une courbe du troisième degré passant par le sommet donné, symétrique par rapport à l'axe des y, et ayant pour asymptotes les droites

$$x = \pm \beta, \quad y = -\beta.$$