S. RÉALIS

Addition à deux articles précédents

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 305-315

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__305_0>

ADDITION A DEUX ARTICLES PRÉCÉDENTS (¹);

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

1. La recherche des solutions entières de l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 = h,$$

où a, b, c, h sont des entiers donnés, a été l'objet d'importantes études de la part des géomètres qui se sont occupés de l'Analyse indéterminée, parmi lesquels il nous suffira de citer ici Euler, Lagrange, Gauss, Legendre. Mais si, au point de vue théorique, la question peut être considérée comme traitée d'une manière complète, il n'en est pas ainsi au point de vue de l'application; on sait en effet que, dans la plupart des cas, les calculs exigés par les méthodes classiques deviennent très pénibles, et même impraticables. C'est ce qui donne de l'intérêt aux méthodes particulières, par où des classes plus ou moins étendues d'équations appartenant à la forme indiquée peuvent être résolues d'une manière directe, et par l'emploi de formules explicites.

Aux exemples qui font l'objet des deux articles précédents, on peut en ajouter beaucoup d'autres analogues, tels que ceux que vont nous offrir les équations (6), (7), (8), (9) ci-après, et les équations plus générales considérées aux nos 10 et 11. Mais nous allons préalablement appeler l'attention sur une particularité remarquable que présentent les relations linéaires par lesquelles on passe d'une solution à une autre, lorsque

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 494 et 535.

les coefficients a, b, c ont entre eux une certaine dépendance; cette particularité consiste en ce que ces relations s'appliquent à la fois à plus d'une équation différente, comprise dans la forme dont il s'agit.

2. Soit proposée l'équation

$$mx^2 - (m + n \pm 1)xy + ny^2 = h, \tag{1}$$

plus générale que celles des articles précédents, et que nous supposerons vérifiée par les valeurs entières $x = \alpha$, $y = \beta$.

L'équation (1) sera également vérifiée par les valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} x = (m - n)\alpha - (m - n \pm 1)\beta, \\ y = (m - n \mp 1)\alpha - (m - n)\beta, \end{array}\right. \tag{2}$$

comme il est aisé de s'en assurer par la substitution directe. Hâtons-nous de dire que ces dernières valeurs, par elles-mêmes, n'en engendrent pas d'autres, vu que, en les attribuant à α et β, l'application des formules (2) nous fait retomber sur la solution déjà connue $x = \alpha$, $y = \beta$.

La nouvelle solution, cependant, n'en est pas moins utile à connaître, vu les facilités qui en résultent dans l'application des méthodes générales de résolution; mais c'est surtout lorsqu'il s'agit de certaines classes d'équations que l'utilité des formules (2) devient manifeste, ainsi que nous allons en voir des exemples. Nous nous reportons d'ailleurs, pour différents détails propres à simplifier la question, à une Note insérée au tome VI (année 1880) de la *Nouvelle Correspondance mathématique* [1], et que nous supposons connue du lecteur.

Dans l'équation (1), m, n, h sont des entiers donnés,

---

[1] *Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell*, nos 5, 6, 7, 8, 9.

h n'étant pas nul. Pour que les formules (2) ne deviennent pas illusoires, on doit admettre que $m-n$ est différent de zéro, et que la solution initiale $x=\alpha$, $y=\beta$ et celle qui s'ensuit d'après ces formules ne rentrent pas l'une dans l'autre.

3. Il est digne d'attention (et c'est là la particularité annoncée plus haut) que les expressions (2) s'appliquent également à l'équation, essentiellement différente,

$$(3)\qquad (2m\mp 1)x^2-2(m+n)xy+(2n\mp 1)y^2=h,$$

α, β, h satisfaisant, en ce cas, à la relation

$$(2m\mp 1)\alpha^2-2(m+n)\alpha\beta+(2n\mp 1)\beta^2=h.$$

On remarquera en outre que les nombres m, n n'interviennent dans les expressions (2) que par leur différence $m-n$; cela fait que, pour des valeurs convenables de α et β, ces mêmes expressions s'appliqueront encore aux équations (1) et (3), où l'on aura augmenté ou diminué m et n d'une même valeur entière.

4. Soit fait, comme application, $m=5$, $n=-7$, $h=1$.

L'équation (1), en y prenant, dans l'expression du coefficient de xy, le signe inférieur, devient

$$(4)\qquad 5x^2+3xy-7y^2=1,$$

et les formules (2) se réduisent à

$$(5)\qquad \begin{cases} x=12\alpha-11\beta, \\ y=13\alpha-12\beta, \end{cases}$$

où il n'y a pas lieu de s'appuyer sur les valeurs

$$\alpha=\beta=\pm 1.$$

L'équation (4) (traitée d'une manière différente dans les nos 6 et 7 de la Note citée de la *Nouvelle Correspondance*) est vérifiée par $x = \alpha = 184$, $y = \beta = -121$; elle sera donc également vérifiée, d'après les formules (5), par $x = 3539$, $y = 3844$. C'est ce qui a lieu en effet, et l'on voit facilement de quelle manière : à chaque solution obtenue par le procédé indiqué dans la Note, correspond une autre solution à obtenir à l'aide des formules (5).

3. Dans la même hypothèse de $m = 5$, $n = -7$, et en prenant les signes inférieurs dans les expressions des coefficients de x^2 et de y^2, l'équation (3) devient

$$11x^2 + 4xy - 13y^2 = h.$$

D'après la remarque ci-dessus (n° 2), si cette équation est vérifiée, pour une valeur donnée de h, par $x = \alpha$, $y = \beta$, elle l'est également par les expressions (5) qui conviennent à l'équation (4). Faisant, par exemple, $h = 23$, on a l'équation

$$11x^2 + 4xy - 13y^2 = 23,$$

dont une première et une seconde solution se présentent d'elles-mêmes, à savoir

$$\begin{cases} x = \alpha = 2, \\ y = \beta = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha = 3, \\ y = \beta = -2, \end{cases}$$

et dont deux autres solutions nous seront immédiatement fournies par les valeurs

$$\begin{cases} x = 12.2 + 11.1 = 35, \\ y = 13.2 + 12.1 = 38; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 12.3 + 11.2 = 58, \\ y = 13.3 + 12.2 = 63. \end{cases}$$

Ainsi qu'on l'a dit, les formules (5) sont impuissantes à elles seules à nous mener plus loin; nous ajouterons cependant que les solutions entières de l'équation considérée, parmi lesquelles nous citerons encore les deux suivantes :

$$\begin{cases} x = 330, \\ y = -57, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6787, \\ y = 7374, \end{cases}$$

sont en nombre infini, et qu'elles s'obtiennent, en totalité, au moyen de formules directes. C'est sur quoi nous pourrons revenir dans un article spécial, et en généralisant la question.

6. Lorsque le coefficient de x^2 ou de y^2, dans l'une quelconque des équations (1), (3), est égal à ± 1, chaque solution se trouve généralement associée avec une autre, indépendamment des relations (2); en ce cas, le nombre des solutions distinctes à obtenir à l'aide de ces relations est illimité.

Soit, par exemple, l'équation

$$(6) \qquad x^2 - (n+2)xy + ny^2 = 1,$$

à laquelle on satisfait d'abord par $x = 1$, $y = 0$, puis [d'après les formules (2), où l'on aura fait $m = 1$, et pris les signes supérieurs] par $x = n - 1$, $y = n$.

Résolvons l'équation par rapport à x, après y avoir fait $y = n$; il nous viendra

$$x = \frac{n^2 + 2n}{2} \pm \frac{n^2 + 2}{2},$$

où le signe inférieur nous reconduit à la solution précédemment obtenue, tandis que le signe supérieur nous met en présence de la solution associée

$$\begin{cases} x = n^2 + n + 1, \\ y = n. \end{cases}$$

Au moyen de cette solution, les formules (2) produisent les nouvelles valeurs

$$\begin{cases} x = n^3 - n^2 + 2n - 1, \\ y = n^3 + 2n. \end{cases}$$

associées à leur tour avec

$$\begin{cases} x = n^4 + n^3 - 3n^2 + 2n + 1, \\ y = n^3 + 2n, \end{cases}$$

et il est manifeste que l'on peut continuer ainsi indéfiniment.

7. D'après l'observation faite plus haut (n° 3), les formules

$$\begin{cases} x = (n-1)\alpha - (n-2)\beta, \\ y = n\alpha - (n-1)\beta, \end{cases}$$

relatives à l'équation précédente, donnent également une seconde solution de l'équation

$$(7) \qquad x^2 - 2(n+1)xy + (2n-1)y^2 = 1,$$

que l'on suppose déjà vérifiée par $x = \alpha, y = \beta$.

La première solution étant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, la seconde sera donc $x = n - 1, y = n$. Pour trouver d'autres valeurs des indéterminées, on résoudra d'abord l'équation par rapport à x, après y avoir fait $y = n$, d'où résultera la solution associée

$$\begin{cases} x = 2n^2 + n + 1, \\ y = n. \end{cases}$$

Les formules posées nous donneront ensuite le système de valeurs

$$\begin{cases} x = 2n^3 - 2n^2 + 2n - 1, \\ y = 2(n^3 + n). \end{cases}$$

associé au système

$$\begin{cases} x = 4n^4 + 2n^3 + 6n^2 - 2n - 1, \\ y = 2(n^3 + n). \end{cases}$$

que l'on pourra faire suivre, de même, d'une infinité d'autres.

8. Soit encore l'équation

$$(8) \qquad x^2 - (n+2)xy + ny^2 = -1,$$

qui n'est autre que l'équation (6), dans laquelle on a changé le signe du second membre.

La solution initiale étant ici $x = \alpha = 1$, $y = \beta = 1$, le même procédé et les mêmes formules employées pour l'équation (6) nous fourniront les solutions subséquentes. Nous trouverons ainsi

$$\begin{cases} x = n - 1, \\ y = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = n^2 - n + 1, \\ y = n^2 + 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = n^3 + n^2 + 2n + 1, \\ y = n^2 + 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = n^4 - n^3 + 3n^2 - 2n + 1, \\ y = n^4 + 3n^2 + 1, \end{cases}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ces solutions, du reste, peuvent se déduire directement de celles que l'on a trouvées pour l'équation (6). Faisant, dans celle-ci,

$$n = -n', \quad x = -x', \quad y = y' - x',$$

il en résulte effectivement

$$x'^2 - (n' - 2)x'y' + n'y'^2 = -1,$$

ce qui ne diffère pas de l'équation (8).

9. Considérons, comme dernier exemple, l'équation

$$(9) \qquad x^2 - 2(n-1)xy + (2n-1)y^2 = -2,$$

qui correspond à (7), où l'on a supposé le second membre $= -2$.

D'après ce qui précède, ce sont encore les formules et le procédé relatifs aux cas précédents (6), (7), (8) qui vont nous servir ici. On trouve, en effet, en partant de la solution évidente $x = 1, y = 1$, que l'équation (9) admet une suite indéfinie de solutions ultérieures, les premières étant

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2n + 1, \\ y = 1; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 2n^2 - 2n + 1, \\ y = 2n^2 - 1; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4n^3 - 2n^2 - 4n + 1, \\ y = 2n^2 - 1; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1, \\ y = 4n^4 - 6n^2 + 1, \end{array}\right.$$

. . . .

10. Les développements exposés donnent le moyen de résoudre la question suivante :

Assigner, par formules directes, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 - Axy + By^2 = 1,$$

dans laquelle A *et* B *sont des entiers donnés,* A — 2 *et* A — B — 1 *étant différents de zéro, et le rapport*

$$\frac{A - 2}{A - B - 1}$$

se réduisant à un nombre entier.

Nous nous bornons ici à indiquer le résultat de la solution, d'ailleurs très aisée à trouver.

Ayant fait, pour abréger, $A - B - 1 = p$, on obtiendra, à l'aide de la seule solution initiale $x_1 = 1, y_1 = 0$, et des relations linéaires

$$\left\{\begin{array}{l} x_{2a} = \dfrac{1}{p}[(B - 1)x_{2a-1} - (2B - A)y_{2a-1}], \\ y_{2a} = \dfrac{1}{p}[(A - 2)x_{2a-1} - (B - 1)y_{2a-1}]. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_{2a+1} = Ay_{2a} - x_{2a}, \\ y_{2a+1} = y_{2a}. \end{array}\right.$$

les solutions *entières* consécutives

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{p}(B - 1), \\ y_2 = \dfrac{1}{p}(A - 2), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{p}(A^2 - 2A - B + 1), \\ y_3 = \dfrac{1}{p}(A - 2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{1}{p^2}(A^2B - 4AB - B^2 + 6B - 1), \\ y_4 = \dfrac{1}{p^2}(A^3 - 4A^2 - 2AB + 6A + 4B - 4), \end{cases}$$

que l'on pourra faire suivre d'autant d'autres que l'on voudra.

11. Il est facile de reconnaître que les relations linéaires qui viennent d'être écrites conviennent également à l'équation plus générale

$$x^2 - Axy + By^2 = h, \tag{10}$$

A et B étant comme ci-dessus, et h (différent de zéro) correspondant à une solution initiale $x = \alpha$, $y = \beta$, que l'on suppose connue. Mais comme, en général, les valeurs de α et β ne sont pas exprimables directement par les coefficients, les valeurs ultérieures des indéterminées x, y ne le seront pas non plus, et elles se trouveront ici exprimées en fonction des quatre quantités A, B, α, β.

Dans les cas particuliers où les valeurs initiales seront des nombres constants, ou bien, déterminées en fonction explicite de A et B, ou des quantités dont ces coefficients dépendent, les valeurs successives de x et y s'exprimeront de même au moyen des coefficients, ou des quantités dont ils dépendent.

On trouvera, par exemple, que l'équation

$$x^2 - (n^2 + n + 2)xy + n^2y^2 = -(n + 1),$$

vérifiée d'abord par $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, admet en outre les solutions

$$\begin{cases} x_1 = n^2 + n + 1, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = n^3 - n - 1, \\ y_2 = n^3 + n^2 + 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_3 = n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1, \\ y_3 = n^3 + n^2 + 1, \end{cases}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

dont la loi est donnée par les relations

$$\begin{cases} x_{2a-1} = (n^2 + n + 2)y_{2a-2} - x_{2a-2}, \\ y_{2a-1} = y_{2a-2}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{2a} = (n-1)x_{2a-1} - (n-2)y_{2a-1}, \\ y_{2a} = nx_{2a-1} - (n-1)y_{2a-1}; \end{cases}$$

pour $a = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

On trouvera, de même, que l'équation

$$x^2 - (n^2 + n + 2)xy + n^2y^2 = n^2,$$

vérifiée d'abord par $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, admet les solutions

$$\begin{cases} x_2 = n - 2, \\ y_2 = n - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = n^3, \\ y_3 = n - 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^4 = n^4 - n^3 - n^2 + 3n - 2, \\ y^4 = n^4 - n^2 + 2n - 1, \end{cases}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

découlant des relations

$$\begin{cases} x_{2a} = (n-1)x_{2a-1} - (n-2)y_{2a-1}, \\ y_{2a} = nx_{2a-1} - (n-1)y_{2a-1}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{2a+1} = (n^2 + n + 2)y_{2a} - x_{2a}, \\ y_{2a+1} = y_{2a}, \end{cases}$$

à partir de $a = 1$.

Remarque. — Cette dernière équation étant encore vérifiée par $x'_1 = n$, $y'_1 = 0$, il s'ensuit, de la même manière, cette autre série de solutions

$$\begin{cases} x'_2 = n^2 - n, \\ y'_2 = n^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x'_3 = n^4 + n^3 + n^2 + n, \\ y'_3 = n^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_4 = n^5 - n^3 + 2n^2 - n, \\ y'_4 = n^5 + n^4 + 2n^2, \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui viennent s'ajouter à celles qui précèdent.

Du reste, en faisant $x = nu$, $y = nv$, l'équation devient

$$u^2 - (n^2 + n + 2)uv + n^2 v^2 = 1,$$

et l'on est ramené à la question traitée au n° 10.

12. Il importe d'observer, au sujet des équations comprises dans la classe (10), que les relations linéaires qui établissent la dépendance entre les solutions d'indice pair $2a$, et celles d'indice impair $2a-1$, ne diffèrent pas des relations signalées plus haut à l'égard des équations particulières (6), (7), (8), (9). Ces relations jouissent, en effet, de la propriété annoncée au n° 1, puisqu'elles ne sont pas déterminées par la valeur particulière des coefficients, mais seulement par celle du rapport $\frac{A-2}{A-B-1}$, lequel peut demeurer invariable pour une infinité de valeurs différentes de A et B.