Concours d’agrégation des sciences mathématiques de 1882

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 273-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__273_2>

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1882.

COMPOSITIONS D'ADMISSIBILITÉ.

Mathématiques spéciales.

On donne une ellipse et un point P dans son plan :

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse et tels que la corde commune à l'ellipse et à chacun d'eux passe en P;

2° Trouver, pour chaque position du point P, combien de ces cercles osculateurs sont réels;

3° Montrer que les points de contact de ces cercles osculateurs et de l'ellipse sont sur un même cercle C;

4° Trouver l'enveloppe E du cercle C quand le point P décrit l'ellipse donnée;

5° La courbe E peut être regardée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe et dont les centres sont sur une conique : chercher de combien de manières la courbe E est susceptible de ce mode de génération.

Mathématiques élémentaires.

On donne une sphère et un cercle C de cette sphère; on considère les cônes passant par le cercle C et coupant la sphère suivant un second cercle C′ de grandeur constante :

1° Trouver le lieu géométrique des sommets de tous ces cônes;

2° Dans chacun de ces cônes dont le sommet est extérieur à la sphère et pour lesquels le cercle de sortie C′ ne coupe pas le cercle C, on considère les deux génératrices situées dans le plan principal perpendiculaire au plan du cercle C : déterminer l'angle de ces droites avec le plan du cercle C, connaissant le volume du tronc de cône compris entre les cercles C et C′. Variation de ce volume quand le sommet du cône se déplace sur son lieu.

Pourrait-on, en modifiant l'énoncé du problème, appliquer les formules trouvées au cas où le sommet du cône est extérieur à la sphère, la condition relative aux cercles C et C′ restant la même?

Composition sur certaines parties, désignées à l'avance, du programme de la licence ès sciences mathématiques.

Théorie. — Connaissant le mouvement relatif d'un point par rapport à un système de comparaison, ainsi que le mouvement absolu de ce système, déterminer l'accélération absolue du point.

Application. — Un trièdre trirectangle $Oxyz$ tourne avec une vitesse constante ω autour de son arête Oz, qui est verticale : un plan P, passant par Oy, et faisant avec le plan xOy un angle constant dont la tangente est $\sqrt{\frac{3}{2}}$, est entraîné avec le trièdre. Déterminer, par rapport à ce trièdre, le mouvement de deux points pesants A et B assujettis à rester, le premier sur Ox, le second dans le plan P; les deux points ont chacun une masse égale à l'unité et exercent l'un sur l'autre une attraction mesurée par le produit de leur distance par $2\omega^2$. Quelles doivent être les circonstances initiales pour que la trajectoire relative de B soit une parabole? On néglige l'influence des résistances passives et de la rotation de la Terre.

Compositions finales.

Analyse et Mécanique.

1° Calculer, en se fondant sur les propriétés des intégrales prises suivant un contour fermé, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{L}x\,dx}{(x^2+4)^2},$$

dans laquelle on attribue à $\mathrm{L}x$ et à $x^{\frac{1}{3}}$ leurs valeurs réelles.

2° Un point matériel M non pesant est attiré par chacun des éléments d'une droite indéfinie XX' avec une intensité proportionnelle à la longueur de l'élément et à l'inverse de la quatrième puissance de la distance de cet élément au point M. Déterminer une surface de révolution autour de XX' et telle que, si le point M est assujetti à se mouvoir sur cette surface, il exercera sur elle une pression constante. On donne la position initiale du mobile, ainsi que sa vitesse initiale en grandeur et en direction.

Chercher à quelles conditions doivent satisfaire ces données pour que la surface obtenue soit une sphère ou un tore : déterminer dans ce dernier cas le mouvement du point M.

Exercice de calcul.

Calculer les trois angles d'un triangle sachant que la somme de leurs cotangentes est 1,8, et la somme des carrés de leurs tangentes 11,97.

Épure.

Dans un plan de front on donne : 1° une verticale A; 2° une droite B coupant A en un point P sous un angle de 45°; 3° un cercle C tangent à la droite B au-dessous de laquelle il est situé, et ayant son centre sur l'horizontale du point P. Si l'on fait tourner le cercle C autour de chacune des droites A et B, il engendre deux tores : on demande l'intersection de ces deux tores.

L'intersection se compose du cercle C et d'une courbe D : trouver les tangentes à D aux points où cette courbe rencontre le cercle. Tangentes perpendiculaires à la ligne de terre.

Pour distinguer les parties vues et cachées, on regardera comme transparent le cône dont l'axe est la droite B.

Sujets des leçons.

Ces sujets diffèrent très peu de ceux qui ont été traités en 1881 et 1883.