NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. TARRY

Démonstration d'un théorème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 270-273

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__270_1>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. G. TARRY,

Contrôleur des contributions diverses à Alger.

Il est bien connu que la polaire réciproque d'une conique est une autre conique; il l'est moins que *deux coniques quelconques sont polaires réciproques*. En voici la démonstration :

On sait que, dans le plan de deux coniques quelconques, il existe un triangle et un seul conjugué commun de ces deux coniques et que ce triangle a pour sommets les points de rencontre des couples de côtés opposés du quadrangle des points d'intersection de ces coniques, et pour côtés les droites qui joignent les couples des sommets opposés du quadrilatère de leurs tangentes communes.

---

(1) Cette remarque a le défaut d'être *trop simple*. Néanmoins, je ne la crois pas inutile. Si l'on pouvait former un *catalogue* renfermant un grand nombre d'*équations integrees*, il en résulterait certainement, dans la théorie des équations différentielles, de nouveaux progrès.

De ces propriétés, on déduit immédiatement les lemmes suivants :

Lemme I. — *Dans la figure polaire réciproque de l'ensemble de deux coniques et de leur triangle conjugué commun, ce triangle se transforme en un autre qui est conjugué commun des coniques polaires réciproques des premières.*

Lemme II. — *Si deux coniques sont polaires réciproques par rapport à une conique directrice, le triangle conjugué commun de ces deux coniques sera un triangle conjugué de la conique directrice.*

Considérons maintenant deux coniques quelconques S et Σ et leur triangle conjugué commun ABC.

Désignons par P et Q l'un des points d'intersection de la droite BC et de la droite CA avec la conique S, et par p et q l'une des tangentes menées des sommets opposés A et B à la conique Σ.

D'après le lemme II, si les deux coniques S et Σ sont polaires réciproques, le triangle ABC sera conjugué de leur conique directrice, de plus P et p, ainsi que Q et q, seront pôle et polaire réciproques, et, par suite, le point de rencontre O des tangentes p et q sera le pôle de la droite PQ par rapport à la conique directrice.

Le point O et la droite PQ ont des positions quelconques relativement au triangle ABC, par conséquent, d'après un théorème connu, il existe une conique et une seule par rapport à laquelle le triangle ABC est conjugué, et le point O est le pôle de la droite PQ.

Appelons D cette conique.

Je dis que les coniques S et Σ sont polaires réciproques par rapport à la conique directrice D.

Soit S′ la conique lieu des pôles, par rapport à la conique directrice D, de toutes les tangentes à la conique Σ.

Les tangentes p et q de la conique Σ passant respectivement par les couples de points A, O et B, O ont pour pôles P et Q.

Par conséquent, la conique S′ passe par les points P et Q, situés sur les côtés du triangle ABC qui lui est conjugué.

De même, la conique S passe par les points P et Q et a pour triangle conjugué ABC.

Or, on sait qu'il n'existe qu'une conique satisfaisant à ces conditions; donc la conique S′ n'est autre que la conique S, ce qui démontre le théorème.

Il résulte de là que :

Une conique est à elle-même sa polaire réciproque d'une infinité de manières.

On peut à ce corollaire ajouter le suivant :

Toutes les coniques directrices, par rapport auxquelles une conique donnée est à elle-même sa polaire réciproque, sont doublement tangentes à cette conique.

En effet, si l'on considère un des points d'intersection de la conique donnée avec une conique directrice, la polaire de ce point, tangente à la conique directrice, passe par ce point et est tangente à la conique donnée; la conique donnée et la conique directrice sont donc doublement tangentes.

Le théorème principal dont il est ici question est dû à Steiner; il est si peu répandu, qu'on n'en trouve aucune trace ni dans Poncelet, ni dans Chasles.

Le théorème général peut être appliqué surtout à l'étude des propriétés de deux coniques données. Exemple :

Si une conique est harmoniquement inscrite à une autre, cette dernière lui est harmoniquement circonscrite, et réciproquement.

Enfin, les points d'intersection de deux coniques ayant pour polaires, par rapport à une conique, leurs quatre tangentes communes, *le triangle qui a pour sommets trois des points d'intersection est homologique à un (ou à plusieurs) des triangles formés par trois tangentes communes.*

En appliquant la même méthode à l'espace, on trouve que *deux surfaces quelconques du second degré sont polaires réciproques* et qu'*une surface du deuxième degré est à elle-même sa polaire réciproque d'une infinité de manières.*