NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Remarques sur la même note de M. Ibach

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 263-270

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__263_1>

REMARQUES SUR LA MÊME NOTE DE M. IBACH;

PAR M. E. CATALAN.

I. L'auteur considère les équations

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = V_1, \quad \frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = V_2.$$

Il dit : « La méthode de d'Alembert conduit à démontrer que la résolution d'un pareil système dépend de l'intégration d'une équation différentielle de la forme

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} + Au + Bu^2 = C,$$

dans laquelle A, B, C sont des fonctions de x. Or *Euler a prouvé que l'on ne peut intégrer cette dernière équation que si l'on en connaît* A PRIORI *une solution particulière*... »

Où Euler a-t-il énoncé une pareille proposition [1]?

[1] La phrase de M. Ibach doit être rectifiée de la manière suivante : « Euler a prouvé que l'on peut intégrer cette dernière équation si l'on en connaît *a priori* une solution particulière; en thèse générale, le problème est donc insoluble. » Ch. B.

Si l'on procédait par analogie, on conclurait que :

Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on doit en connaître une racine.

Du reste, l'équation (2), immédiatement intégrable quand elle se réduit à

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{X}(a + bu + cu^2), \tag{3}$$

comprend, comme cas particulier, l'équation de Riccati. La proposition dont il s'agit semble donc inexacte.

II. La méthode proposée par M. Ibach est une extension, fort compliquée, de celle que l'on doit à d'Alembert. Le procédé suivant, bien connu, est beaucoup plus simple.

De la première des équations données, on déduit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{P}_1 \frac{dy}{dx} + \mathrm{P}'_1 y + \mathrm{Q}_1 \frac{dz}{dx} + \mathrm{Q}'_1 z = \mathrm{V}'_1. \tag{4}$$

Éliminant z et $\frac{dz}{dx}$, on trouve l'équation *linéaire*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\mathrm{P}_1 + \mathrm{Q}_2 - \frac{\mathrm{Q}'_1}{\mathrm{Q}_1}\right)\frac{dy}{dx} \\ &\qquad + \left(\mathrm{P}'_1 - \mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2 + \mathrm{Q}_2\mathrm{P}_1 - \frac{\mathrm{Q}'_1}{\mathrm{Q}_1}\mathrm{P}_1\right)y \\ &\quad = \mathrm{V}'_1 - \mathrm{Q}_1\mathrm{V}_2 + \mathrm{Q}_2\mathrm{V}_1 - \frac{\mathrm{Q}'_1}{\mathrm{Q}_1}\mathrm{V}_1; \end{aligned}\right. \tag{5}$$

ou, pour abréger,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{G}\frac{dy}{dx} + \mathrm{H}y = \mathrm{K}. \tag{6}$$

Cette équation (6) donne lieu aux remarques suivantes :

1° Elle est intégrable, en premier lieu, quand les coefficients P_1, Q_1, P_2, Q_2 se réduisent à des constantes.

2° Si le coefficient G est nul, et que l'on fasse abstraction du second membre, elle devient

$$(7) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + Xy = 0.$$

Celle-ci a été étudiée, tout particulièrement, par Liouville.

3° La condition $G = 0$, ou

$$\frac{Q'_1}{Q_1} = P_1 + Q_2,$$

est vérifiée si l'on prend

$$(8) \qquad Q_1 = e^{\int (P_1 + Q_2)\,dx} \text{ (1)},$$

valeur d'où résulte

$$(9) \qquad H = P'_1 - Q_1 P_2 - P_1^2.$$

4° Si, de plus,

$$(10) \qquad P_2 = \frac{P'_1 - P_1^2}{Q_1} = (P'_1 - P_1^2)\,e^{-\int (P_1 + Q_2)\,dx},$$

l'équation (6), devenant

$$\frac{d^2y}{dx^2} = K,$$

a pour intégrale

$$y = C + C_1 x + \int dx \int K\,dx.$$

Etc.

III. M. Ibach applique sa méthode aux équations (2)

$$\frac{dy}{dx} + xy + x^2 z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} + a^2 x^2 y + xz = 0.$$

(1) Cette formule (8) a une grande analogie avec la relation (A) de M. Ibach.

(2) Page 179.

Il trouve

$$y = \frac{C e^{\log x - \frac{x^2}{2} - \frac{a x^3}{3}} + C' e^{\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{a x^3}{3}}}{2ax},$$

$$z = \frac{C e^{\log x - \frac{x^2}{2} - \frac{a x^3}{3}} - C' e^{\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{a x^3}{3}}}{2ax};$$

mais ces valeurs sont *inexactes* [1].

A cause de $e^{\log x} = x$, on peut les écrire ainsi :

$$y = A e^{-\frac{x^2}{2} - a\frac{x^3}{3}} + B e^{-\frac{x^2}{2} + a\frac{x^3}{3}},$$

$$z = A e^{-\frac{x^2}{2} - a\frac{x^3}{3}} - B e^{-\frac{x^2}{2} + a\frac{x^3}{3}}.$$

Par conséquent,

$$L(y+z) = L(2A) - \left(\frac{x^2}{2} + a\frac{x^3}{3}\right),$$

$$L(y-z) = L(2B) - \left(\frac{x^2}{2} - a\frac{x^3}{3}\right);$$

$$dy + dz = -(y+z)(x + ax^2)\,dx,$$

$$dy - dz = -(y-z)(x - ax^2)\,dx;$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy - ax^2 z, \quad \frac{dz}{dx} = -xz - ax^2 y;$$

ou

$$\frac{dy}{dx} + xy - ax^2 z = 0, \quad \frac{dz}{dx} - ax^2 y - xz = 0.$$

Ce sont donc là les équations différentielles qui doivent être substituées aux premières.

IV. Comme troisième application, l'auteur a pris le

---

(1) L'erreur provient de ce que M. Ibach dit, 9e ligne de la p. 179, que, si $P_1 = Q_2$, P_2 et Q_1 doivent être dans un rapport constant, ce qui est une inadvertance manifeste, car on conclut de la condition

$$\sqrt{\frac{P_2}{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\,dx}$$

que P_2 et Q_1 doivent être égaux. Ch. B.

système

$$\frac{dy}{dx} + \frac{e^x + 1}{x} y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} + x^2 y + \frac{e^x}{x} z = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Il en déduit :

$$2xy = Ce^{-u} - C'e^{-v}, \quad 2xz = Ce^{-u} - C'e^{-v},$$

en supposant

$$u = \int \frac{e^x + x^2}{x} dx, \quad v = \int \frac{e^x - x^2}{x} dx.$$

Ces intégrales ne sont pas plus exactes que les premières [2]. En effet, comme on peut aisément le vérifier, elles conduisent aux équations

$$\frac{dy}{dx} - \frac{e^x - 1}{x} y - zx = 0, \quad \frac{dz}{dx} + \frac{e^x - 1}{x} z - yx = 0.$$

Ces résultats erronés sont-ils fortuits ? Proviennent-ils de la méthode imaginée par M. Ibach ? Ce sont des questions que je n'ai pas le loisir de résoudre.

V. Comme suite à ces *Remarques*, j'indiquerai certains cas, très simples, dans lesquels l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0 \tag{11}$$

est intégrable.

Supposons d'abord qu'elle ait la forme

$$(x - a)(x - b)y'' + (fx + g)y' + hy = 0, \tag{12}$$

et cherchons si

$$y_1 = (x - a)^p$$

en peut être une intégrale particulière.

---

(1) Page 180.

(2) Il y a simplement une faute d'impression au dénominateur de z, où il faut lire 2 au lieu de 2 z. Ch. B.

On trouve

$$(13)\quad p(p-1)(x-b)+p(fx+g)+h(x-a)=0,$$

équation qui se décompose en

$$p(p-1)+pf+h=0,\quad -bp(p-1)+gp-ah=0,$$

ou bien

$$(a-b)(p-1)+af+g=0,\quad p(bf+g)-(a-b)h=0;$$

puis, en supposant $a-b$ différent de zéro :

$$(14)\quad (a-b)^2h+(af+g)(bf+g)=(a-b)(bf-g),$$

$$(15)\quad p=\frac{(a-b)h}{bf+g}.$$

Quand la *condition* (14) est remplie, la formule (15) est applicable.

Si l'on veut que

$$y_2=(x-b)^p$$

soit une seconde intégrale particulière, la relation (14) ne doit pas être altérée quand on y permute a et b. Donc

$$bf+g=-(af+g),$$

ou

$$(16)\quad g=-\tfrac{1}{2}(a+b)f;$$

et, par conséquent,

$$(17)\quad p=-2\frac{h}{f}=1-\frac{f}{2}.$$

L'intégrale générale de l'équation

$$(18)\quad (x-a)(x-b)y''+f\left(x-\frac{a+b}{2}\right)y'-\frac{f}{2}\left(1-\frac{f}{2}\right)y=0$$

est donc

$$(19) \qquad y = A(x-a)^{1-\frac{f}{2}} + B(x-b)^{1-\frac{f}{2}} \text{ (1)}.$$

Application. — Soit l'équation

$$\left(x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}\right)y'' + \left(\tfrac{8}{3}x - 2\right)y' + \tfrac{1}{9}y = 0 \text{ (2)},$$

dans laquelle $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$. On trouve $f = \frac{8}{3}$. Donc l'intégrale demandée est

$$y = A(x-1)^{-\frac{1}{3}} + B\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Autre application.

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

On obtient

$$y = Ax^{\sqrt{-1}} + Bx^{-\sqrt{-1}};$$

puis, par une transformation évidente,

$$y = C\sin(Lx) + D\cos(Lx).$$

VI. Dans l'équation (12), posons

$$(20) \qquad y = e^{\int u\,dx}.$$

Elle devient, comme l'on sait (3),

$$(21) \qquad u^2 + u' + Pu + Q = 0.$$

Essayons dans quels cas u peut être un *polynôme entier*; par exemple, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

La substitution donne

$$-Q = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + 2\alpha x + \beta + P(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

---

(1) Dans le cas où les facteurs $x - a$, $x - b$ deviennent égaux, cette formule doit être remplacée par celle-ci :

$$y = (x-a)^{-\frac{f}{2}}(Cx + D).$$

(2) Intégrée par M. Désiré André (*Journal de Resal*, p. 287; 1881). La Note de cet ingénieux géomètre a été l'occasion du petit problème que nous venons de résoudre.

(3) Voir ci-dessus, équation ([illegible])

Donc, prenant *arbitrairement* P, on a la valeur correspondante de Q. Si, par exemple, P est un polynôme du deuxième degré, Q sera un polynôme du quatrième degré. Voilà donc une infinité de cas dans lesquels *l'équation* (11) *admet une intégrale de forme donnée* [1].

P.-S. — Les valeurs de y et de z, relatives à l'*application II* (p. 180), sont inexactes.

22 mai 1884.