NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Note sur la symédiane

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 25-29

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__25_1>

NOTE SUR LA SYMÉDIANE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

A l'occasion de ma Note *Sur un élément du triangle rectiligne; symédiane* (1), j'ai reçu de M. E. Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique, deux Notes présentées par lui à l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, l'une en 1873, au Congrès de Lyon; l'autre, en 1874, au Congrès de Lille.

Je m'empresse de dire que le point remarquable du triangle auquel ces Notes sont consacrées n'est autre que le point de concours ou *centre des symédianes*, que M. Le-

(1) *Nouv. Ann.*, 3e série, t. II, p. 450.

moine appelle *centre des médianes antiparallèles* [1].

Mais, M. Lemoine s'est attaché surtout aux propriétés de ce point, tandis que je me suis plutôt occupé de la *symédiane* elle-même, en sorte que, à part certains théorèmes qui se présentent d'eux-mêmes au seuil de cette étude, nous avons obtenu des résultats différents.

Je crois être agréable aux lecteurs des *Nouvelles Annales* en leur faisant connaître les élégants théorèmes de M. Lemoine, antérieurs, je le répète, à mes recherches personnelles. Mais, malgré les titres que vaut à M. Lemoine sa priorité, je conserverai le terme de *symédiane,* plus court que celui de *médiane antiparallèle.*

Je donnerai ensuite quelques propriétés de la symédiane que j'ai trouvées depuis la publication de ma première Note.

Théorèmes de M. Lemoine.

— Les coordonnées trilinéaires du *centre des symédianes*, le triangle ABC étant pris pour triangle de référence, sont $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$.

— Le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux trois côtés d'un triangle est constante, est une ellipse qui a pour centre le *centre des symédianes*.

— Les six points déterminés sur les côtés du triangle par les parallèles à ces côtés menées par le *centre des symédianes* sont sur un cercle dont le centre est au milieu de la ligne qui joint le *centre des symédianes* au centre du cercle circonscrit.

Les cordes que les côtés déterminent dans ce cercle

(1) Mon excuse d'avoir ignoré les recherches de M. Lemoine sera que les procès-verbaux de l'Association française sont peu répandus.

sont proportionnelles aux cubes des côtés correspondants.

Les cordes comprises entre les côtés sont égales, et sont antiparallèles des côtés opposés par rapport aux angles correspondants.

— Si le triangle $A'B'C'$ est homothétique du triangle ABC par rapport au *centre des symédianes* de celui-ci, les six points déterminés par les côtés de $A'B'C'$ sur les côtés de ABC sont sur un cercle.

— La droite qui joint le milieu d'un côté au milieu de la hauteur correspondante passe par le *centre des symédianes.*

Cette droite est le lieu du centre des rectangles inscrits dans le triangle, et ayant leur base sur le côté considéré.

Le *centre des symédianes* est donc le centre de trois rectangles inscrits dans le triangle, et il jouit seul de cette propriété.

— La conique inscrite dans un triangle, et qui a pour centre le *centre des symédianes* touche les côtés aux pieds des hauteurs.

— La conique inscrite dans un triangle et dont l'un des foyers est au centre de gravité a son autre foyer au *centre des symédianes.*

— Soient O_a, O_b, O_c les centres des cercles exinscrits au triangle ABC. Les polaires de A, B, C prises respectivement par rapport aux cercles de centres O_a, O_b, O_c, forment un triangle $A'B'C'$.

1° Les triangles $A'B'C'$, $O_aO_bO_c$ ont même *centre des symédianes* ω.

2° Les droites $A'\omega$, $B'\omega$, $C'\omega$ passent respectivement par les milieux de BC, AC, AB.

Ce dernier théorème est attribué par M. Lemoine à M. Neuberg.

Théorèmes de l'Auteur.

— La *symédiane* est conjuguée harmonique de la tangente au cercle circonscrit issue du même sommet, par rapport aux deux côtés adjacents.

Ce théorème se déduit de celui que nous avons donné aux *Exercices*, n° V (3e série, t. II, p. 463).

— AH, BH_1, CH_2 étant les trois hauteurs du triangle ABC, on abaisse du point H les perpendiculaires HP et HQ sur les côtés AB et AC, et des points H_1 et H_2 les perpendiculaires H_1S et H_2R sur BC. Les droites PR et QS se coupent sur la *symédiane* issue de A.

— Par les sommets A et B on élève des perpendiculaires au côté AB, par les sommets A et C des perpendiculaires au côté AC. Ces quatre droites forment un parallélogramme dont une diagonale passe par le point A. L'autre diagonale : 1° est perpendiculaire à la *symédiane* issue de A, 2° coupe le côté BC au même point que la tangente au cercle circonscrit menée par le point A.

Ce théorème, rapproché de l'antéprécédent et de celui que j'ai donné dans ma première Note au § 15, conduit à cette curieuse propriété de la parabole :

Si, par le point de rencontre T *de deux tangentes à une parabole, on élève des perpendiculaires à ces tangentes, les droites ainsi menées forment avec les normales correspondantes un parallélogramme, dont une diagonale passe par le point* T ; *l'autre diagonale :*

1° *Passe par le foyer de la parabole,*

2° *Est perpendiculaire à la droite qui joint ce point au point* T.

Ce théorème, qui généralise une propriété bien connue de la parabole (quand l'angle des tangentes est droit), n'a, je crois, jamais été donné ; il fournit une construction très simple du foyer d'une parabole dont on connaît deux points quelconques et les tangentes en ces points.

Note additionnelle.

Depuis la rédaction de cette Note, j'ai reçu diverses autres communications, d'où il résulte qu'on a donné un très grand nombre de théorèmes relatifs au point que j'ai obtenu par la rencontre des symédianes, et qu'on définit dans les recherches dont je parle comme *le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle est minimum*. Je citerai parmi ces recherches celles de M. Brocard et de M. Neuberg, dont je ne connais que ce que m'en a appris une très gracieuse lettre de ce dernier; mais M. Neuberg m'a fait savoir qu'il se propose de réunir, dans un travail qui sera bientôt publié, toutes les propriétés connues de cet intéressant élément du triangle.

M. Tucker, de Londres, m'a fait aussi remarquer qu'un certain point qui joue un rôle dans une Note publiée par lui dans *the Quarterly Journal,* sous le titre *The triplicate-ratio circle,* se confond avec le centre des symédianes.