Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 252-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__252_1>

CORRESPONDANCE.

MONSIEUR,

Permettez-moi de répondre à la Lettre de M. Gilbert. Ses observations n'ajoutent rien à la rigueur de la démonstration de M. Jordan. Il suppose fixes les valeurs successivement interpolées dans l'intervalle considéré; mais, dans mon exemple, on peut bien les supposer fixes, et le raisonnement subsistera toujours, si les deux premières conservent la forme $\frac{1}{(2n+1)\pi}$ et $\frac{1}{2n\pi}$.

Enfin on a toujours un système de quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ dont chacune a pour limite zéro, mais dont le nombre croît indéfiniment; et, quand cela arrive, on ne peut pas conclure en général que leur maximum tende aussi vers zéro.

M. Gilbert dit que le théorème sera démontré si l'on prouve que, pour *un* mode de division, les ε ont pour limite zéro. Si l'on entend par ces mots que, pour un mode de division, le maximum des ε a pour limite zéro, la proposition est juste; mais, comme cela n'arrive pas pour *tout* mode de division, le théorème résultera démontré lorsque M. Gilbert aura trouvé ce mode particulier de division, pour lequel la condition précédente est satisfaite.

Et je dis cela sans malice, parce que ce mode existe, mais je laisserai le soin de le trouver à M. Gilbert; et, pour bien fixer la question, je lui propose de démontrer ce théorème, dont il se sert :

Si $f(x)$ a une dérivée déterminée et finie $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle fini (a, b), étant fixée une quantité ε arbitrairement petite, on peut toujours diviser l'intervalle (a, b) avec les points

$$x_0 = a, \quad x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_{n-1}, \ x_n = b,$$

de façon que chacune des différences

$$\frac{f(a_{r+1}) - f(a_r)}{a_{r+1} - a_r} - f'(a_r) \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

soit, en valeur absolue, moindre que ε.

J'ai dit, dans ma première lettre, qu'on démontre facilement la formule

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x+\theta h),$$

sans supposer la continuité de la dérivée, mais seulement son existence (c'est-à-dire l'existence d'une dérivée déterminée et finie pour toutes les valeurs de la variable dans l'intervalle considéré). J'ai appris cette démonstration de M. Genocchi, quand j'étais étudiant; elle est due à M. Ossian Bonnet, et se trouve dans le *Cours de Calcul* de M. Serret (2e édit., p. 17); mais il y a quelques petites imperfections, qui peuvent expliquer pourquoi M. Jordan a des doutes sur sa rigueur. Mais elle se trouve aussi parfaitement rigoureuse dans :

Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali,* p. 75; Pisa, 1878.

Harnack, *Differential- und Integralrechnung,* p. 64; Leipzig, 1881.

Pasch, *Einleitung in die Diff.- und Integralrechnung,* p. 83; Leipzig, 1882, etc. (1).

L'exemple cité par M. Gilbert, pour prouver que le théorème est inexact, ne satisfait pas aux conditions du théorème. En effet, la fonction de M. Gilbert a, pour $x = a$, ce qu'on appelle une dérivée à gauche et une dérivée à droite (*rückwärts und vorwärts genommene Differential-Quotienten*), et n'a pas une dérivée ordinaire déterminée.

J'ajouterai enfin, en réponse à M. Jordan, que si $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend uniformément vers $f'(x)$, cette dérivée est continue, et réciproquement.

J'ai l'honneur d'être, etc. G. Peano.

---

(1) J'ai envoyé cette démonstration à M. Jordan, il y a quelque temps; mais vous la trouverez ci-jointe. G. P.

Voici la démonstration de la formule

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h).$$

THÉORÈME I (de Rolle). — *Si $f(x)$ a une dérivée déterminée et finie $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), et si $f(a)=0$, $f(b)=0$, on a, pour une certaine valeur x_1 de x comprise dans l'intérieur du même intervalle,*

$$f'(x_1)=0.$$

En effet, $f(x)$, ayant une dérivée, est continue; et, en variant x entre a et b, $f(x)$ prendra sa plus grande et sa plus petite valeur. Si ces valeurs extrêmes sont toutes les deux nulles, la fonction sera constamment nulle, et l'on aura aussi

$$f'(x)=0.$$

Si elles ne sont pas toutes les deux nulles, soit x_1 la valeur de x par laquelle $f(x)$, sans être nulle, devient maximum ou minimum. La valeur x_1 est intérieure à l'intervalle (a, b), car $f(a)=0$, et $f(b)=0$; et pour $x=x_1$ la fonction n'est ni croissante ni décroissante; donc $f'(x_1)$ n'est ni négative ni positive; et, comme on a supposé qu'elle est déterminée et finie, elle sera nulle.

THÉORÈME II. — *Si $f(x)$ a une dérivée déterminée et finie $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), on a*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_1),$$

où x_1 est une valeur de x comprise entre a et b.

En effet, en appliquant le théorème précédent à la fonction

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)],$$

pour laquelle

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 0, \quad F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

on aura

$$F'(x_1) = 0$$

ou

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On voit qu'on ne suppose nullement la continuité de la dérivée, mais seulement son existence. On peut faire abstraction de son existence pour les valeurs $x = a$ et $x = b$, mais en supposant $f(x)$ continue pour ces valeurs; le théorème reste encore vrai si la dérivée devient infinie, mais de signe déterminé.

Cette démonstration est de M. Ossian Bonnet.

G. P.

C'est par erreur que nous avons oublié de mentionner : M. Moret-Blanc, comme ayant résolu les questions 1285, 1459 et 1474; M. A. Droz, comme ayant résolu la question 1459; MM. Basille Dolguinzerve, de Moscou, E. Barisien, lieutenant au 141e de ligne, et Henry Bourget, comme ayant résolu la question 1462; MM. Ph. Anstett, élève du lycée de Lyon, E. Barisien, E. Brassart, et un anonyme, comme ayant résolu la question 1463; MM. Ph. Anstett, E. Barisien, E. Brassart et M. Genty, élève du lycée Charlemagne, comme ayant résolu la question 1465; MM. E. Barisien, L. Clément, élève du lycée de Rouen, et M. Genty, comme ayant résolu la question 1466; MM. E. Barisien, L. Clément et P. Terrier, comme ayant résolu la question 1472; MM. F. Borletti et N. Goffart, comme ayant résolu la question 1474.