NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Sur le calcul des dérivées à indices quelconques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 240-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__240_0>

SUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES A INDICES QUELCONQUES;

PAR M. H. LAURENT.

I.

La première idée du calcul des dérivées à indices quelconques remonte à Leibnitz; mais c'est à Liouville que l'on doit d'avoir montré tout le parti que l'on pouvait tirer de cette généralisation du Calcul différentiel, et l'on peut le regarder comme le véritable créateur de la nouvelle théorie.

Pour Liouville, si l'on a

$$f(x) = \Sigma A e^{\alpha x},$$

la dérivée d'ordre n de $f(x)$ sera $\Sigma A \alpha^n e^{\alpha x}$, A, α et n désignant des nombres quelconques indépendants de x. Cette définition de la dérivée $n^{\text{ième}}$ présente des inconvénients, qu'il serait trop long d'énumérer complètement, et qui d'ailleurs sont aujourd'hui bien connus.

M. Letnikoff, en 1874, a proposé une nouvelle définition des dérivées à indices fractionnaires, à laquelle il n'y a point de reproche à adresser. Pour lui, la dérivée d'ordre $-p$, p désignant un nombre positif, de la fonction $f(x)$, prise entre les limites x_0 et x, est la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_{x_0}^{x} f(z)(x-z)^{p-1}\,dz.$$

Lorsque cette intégrale n'a plus de sens, c'est-à-dire lorsque le nombre p devient négatif, la dérivée de $f(x)$ est définie comme dérivée d'un ordre entier d'une dérivée d'ordre négatif. La définition de M. Letnikoff est plus générale que celle de Liouville, elle donne d'ailleurs les mêmes résultats toutes les fois que cette dernière donne des résultats précis.

Je propose une nouvelle définition de la dérivée, qui au fond revient à celle de M. Letnikoff, mais qui est plus immédiatement accessible aux calculs, en ce sens qu'elle fournit directement l'expression de la dérivée dont on a besoin.

II.

J'appelle dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction monogène $f(x)$, prise entre les limites x_0 et x, ou prise à partir de la limite x_0, l'intégrale

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}, \tag{1}$$

prise le long d'un lacet ayant son origine au point x_0, ses bords rectilignes et sa partie circulaire décrite autour du point x comme centre. La fonction $\Gamma(n+1)$ qui figure dans cette expression représentant non pas la fonction eulérienne de seconde espèce, mais bien la fonction que Gauss a substituée à cette intégrale pour interpoler le produit $1.2.3\ldots n$, fonction qui est monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan et qui a pour infinis les points $0, -1, -2, -3, \ldots$.

La fonction $(z-x)^{n+1}$ pouvant avoir une infinité de valeurs, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ pourra aussi avoir une infinité de valeurs; mais, quand on se sera donné la valeur initiale de cette fonction en x_0, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(z)$ sera bien déterminée (nous écartons, bien entendu, le cas où, sur le lacet même, la fonction f deviendrait infinie ou discontinue).

Considérons d'abord le cas où $n+1$ est moindre que un : alors l'intégrale (1), prise le long du cercle du lacet, est nulle, et sa valeur, prise le long du premier bord du lacet, est

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}};$$

sa valeur prise le long du second bord est

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x}^{x_0}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}\,e^{-2(n+1)\pi\sqrt{-1}}.$$

La présence du facteur exponentiel provient de ce que le point z a tourné autour du point critique x, en sorte que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ sera

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\left(1-e^{-2(n+1)\pi\sqrt{-1}}\right)\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\pi}\,\frac{e^{(n+1)\pi\sqrt{-1}}-e^{-(n+1)\pi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}$$

ou

$$(2)\qquad \Gamma(n+1)\frac{\sin(n+1)\pi}{\pi}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}};$$

mais on sait que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

En faisant $a=n+1$, cette formule devient

$$\Gamma(n+1)\Gamma(-n)=\frac{\pi}{\sin(n+1)\pi};$$

tirant $\Gamma(n+1)$ de là, pour porter sa valeur dans l'expression (2), celle-ci devient

$$\frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)}{(x-z)^{n+1}}\,dz.$$

Cette valeur de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ coïncide avec celle qui sert de définition à M. Letnikoff.

Lorsque le nombre n est positif, il n'est plus permis de négliger l'intégrale de $\frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}dz$ prise le long de la partie circulaire du lacet; il y a plus, lorsque n est entier, les intégrales prises le long des bords se détruisent et il reste seulement l'intégrale prise le long de la partie circulaire qui a pour valeur, en vertu du calcul des résidus, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$, le mot *dérivée* étant pris ici avec son sens ordinaire : ces dérivées d'ordre entier et positif sont donc toutes égales et indépendantes de la limite x_0.

Nous désignerons par $\int_{x_0}^{x}\frac{d^nf}{dx^n}$ ou par $\int_{x_0}^{x}\frac{d^nf}{dz^n}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ prise entre les limites x_0 et x, le symbole $\frac{d^nf}{dx^n}$ désignant l'intégrale indéfinie

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

prise en laissant indéterminée l'origine x_0 du lacet le long duquel s'effectue l'intégration.

III.

Envisageons maintenant l'intégrale

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

et faisons varier x; elle a une, plusieurs ou même une infinité de valeurs pour chaque valeur de x, provenant de ce que, pour $x=x_0$, on a pu choisir l'une quelconque des valeurs que peut prendre $(z-x)^{n+1}$. Ces valeurs se permuteront entre elles quand le point x tournera autour de x_0; en effet, si l'on considère un point z voisin de x_0 sur le premier bord du lacet, ce point tournera autour de x_0 en même temps que le point x. Les valeurs de $(z-x)^{n+1}$ se permuteront l'une dans l'autre en vertu de la loi de continuité; et, si l'on s'est donné une valeur initiale de $(z-x)^{n+1}$, on ne sera plus maître de la choisir arbitrairement, à chaque valeur de la dérivée que l'on voudra calculer, si l'on s'astreint à ne pas rompre la continuité.

Ainsi, pour les dérivées qui ne sont pas d'un ordre entier, la limite inférieure est un point de ramification algébrique quand l'ordre de la dérivée est commensurable, transcendant, dans le cas contraire. Ce fait n'était pas mis en lumière dans la théorie de M. Letnikoff.

Ces conclusions supposent que, pendant que le point x tourne autour de x_0, les bords du lacet ne rencontrent pas de point pour lequel $f(z)$ cesserait d'être synectique; mais il sera facile de corriger nos conclusions dans chaque cas particulier, quand on connaîtra la nature des points singuliers franchis par les bords du lacet.

IV.

Avant d'aller plus loin, montrons comment on calcule les dérivées de quelques fonctions.

Dérivées d'une constante. — La dérivée $n^{\text{ième}}$ de la constante a est égale à

$$\frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{x_0}^{x}\frac{a\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Si n est négatif, changeons n en $-m$ et nous aurons

$$\frac{1}{\Gamma(m)}\int_{x_0}^{x} a(z-x)^{m-1}\,dz$$

ou bien

$$-\frac{a}{\Gamma(m+1)}(x-x_0)^m = -\frac{a}{\Gamma(-n+1)}(x-x_0)^{-n};$$

d'une manière générale, la dérivée cherchée est égale à l'intégrale

$$a\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

On peut prendre pour contour d'intégration un cercle décrit du point x comme centre avec la distance xx_0 pour rayon; en appelant r cette distance et θ_0 l'angle que xx_0 fait avec l'axe des x, la dérivée cherchée devient

$$a\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} d\theta\, r^{-n}e^{-n\theta\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire

$$-a\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi n}\frac{e^{-2n\pi\sqrt{-1}}}{r^n e^{n\theta_0\sqrt{-1}}}=-a\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi n}(e^{-2\pi n}-1)(x_0-x)^{-n}.$$

Une transformation analogue à celle que nous avons faite plus haut donne

$$-\frac{a}{\Gamma(-n+1)}(x-x_0)^{-n}.$$

Pour prendre la dérivée d'ordre $n+\varphi$ d'une fonction, n désignant un entier et φ un nombre compris entre o et -1, il suffit de prendre la dérivée d'ordre φ et de la différentier n fois, le mot *différentier* étant pris ici dans son acception ordinaire; cette règle, prise comme définition par M. Letnikoff, résulte de la formule

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\frac{\Gamma(\varphi+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{\varphi+1}}\\ =\frac{\Gamma(\varphi+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+\varphi+1}}(\varphi+1)(\varphi+2)\ldots(\varphi+n)\\ =\frac{\Gamma(n+\varphi+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+\varphi+1}}.\end{aligned}$$

Il peut être utile parfois de changer la limite x_0 à partir de laquelle on prend une dérivée : voici comment on peut procéder quand l'ancienne limite x_0, la nouvelle x'_0 et le point x forment un triangle qui, dans son intérieur, ne contient pas de point critique de $f(z)$.

Le lacet qui a pour bords la droite $x_0 x$ peut être remplacé par le contour équivalent formé d'une droite allant de x_0 en x'_0, d'un lacet ayant pour bords la droite $x'_0 x$ et d'une droite allant de x'_0 en x_0; en intégrant alors la fonction $\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$ successivement le long du lacet qui a pour bords $x_0 x$ et le long du contour que nous venons de définir, on a

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} = \int_{x_0}^{x'_0} \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} + \int_{x'_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n}$$
$$+ \int_{x'_0}^{x} \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} e^{-2\pi(n+1)\sqrt{-1}}$$

ou, à l'aide d'une transformation déjà effectuée,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} = \int_{x'_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{x_0}^{x'_0} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}.$$

Dans le cas où le triangle $x_0 x'_0 x$ contiendrait des points critiques de $f(z)$, la formule précédente subsisterait; mais l'intégrale qui figure dans cette formule devrait être prise le long d'un contour curviligne, formant avec $x_0 x$ et $x x'_0$ un contour fermé ne renfermant pas de point critique de $f(z)$.

Dérivées d'une puissance. — En supposant n positif, la dérivée d'ordre $-n$ de $(x-a)^p$ est

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} (z-a)^p \, dz.$$

Si l'on pose

$$\theta = \frac{z-a}{x-a},$$

cette intégrale devient

$$\frac{(x-a)^{n+p}}{\Gamma(n)}\int_{\frac{x_0-a}{x-a}}^{1}(1-\theta)^{n-1}\theta^p\,d\theta.$$

Si alors on suppose $x_0 = a$, la dérivée cherchée se réduit à

$$\frac{(x-a)^{n+p}}{\Gamma(n)}\mathrm{B}(n, p+1) = \frac{(x-a)^{n+p}}{\Gamma(n)}\,\frac{\Gamma(n)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n+p+1)}$$

ou à

$$(x-a)^{n+p}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n+p+1)};$$

par suite, la dérivée d'ordre n est

$$(x-a)^{p-n}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}.$$

Dérivées de e^{ax}. — La dérivée de e^{ax} d'ordre $-n$ est

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}e^{az}\,dz$$

ou, en posant $z = x - t$,

$$-\frac{e^{ax}}{\Gamma(n)}\int_{x-x_0}^{0}t^{n-1}e^{-at}\,dt.$$

On voit que, si $x_0 = -\infty$, la dérivée cherchée sera $\frac{e^{ax}}{a^n}$, en supposant a positif (si a était négatif, ce résultat serait encore exact, mais il faudrait supposer $x_0 = +\infty$), et que la dérivée d'ordre n de e^{ax} sera $a^n e^{ax}$, comme par la méthode de Liouville. Notre manière de prendre les dérivées comprend donc celle de MM. Liouville et Letnikoff; elle est plus générale que celle de Liouville et considère les valeurs multiples des dérivées, valeurs que M. Letnikoff n'envisageait pas.

V.

Nous allons encore démontrer que

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n}{dx^n} \int_{x_0}^{x} \frac{d^m f}{dx^m} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^m}{dx^m} \int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^{m+n} f}{dx^{m+n}};$$

à cet effet, observons que

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Pour prendre la dérivée d'ordre m, on peut différentier sous le signe $\int$, puisque cette différentiation revient à une intégration et à une multiplication par un facteur constant; on a donc

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{d^m}{dx^m} \int_{x_0}^{x} \frac{d^n f}{dx^n} &= \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{m+n+1}} \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \frac{\Gamma(m+n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{m+n-1}} \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{d^{m+n} f(z)}{dx^{m+n}}, \qquad \text{C. Q. F. D.}
\end{aligned}$$

VI.

La règle de la différentiation d'un produit s'applique encore quand il s'agit de dérivées à indices quelconques; il s'agit pour le prouver de vérifier la formule

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n \varphi(x)\psi(x)}{dx^n} = \varphi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d^n \psi}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{d\varphi}{dx} \int_{x_0}^{x} \frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}} + \ldots,$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi(z)\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} &= \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi(x)\psi(z)}{(z-x)^{n+1}}\,dz \\
&+ \frac{\Gamma(n)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi'(x)\psi(z)}{(z-x)^{n}}\,dz + \ldots
\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$$

$$=\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\psi(z)\left[\varphi(x)+\frac{z-x}{1}\varphi'(x)+\ldots\right]dz}{(z-x)^{n+1}},$$

c'est-à-dire, si la fonction φ est développable par la formule de Taylor

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}=\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)\psi(z)\,dz}{(z-x)^{i+1}}.$$

Ainsi la règle de Leibnitz sera encore applicable pour des valeurs fractionnaires ou incommensurables de l'indice n, si la fonction $\varphi(z)$ est monodrome et monogène, finie et continue à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre le point x et pour rayon la droite xx_0 qui joint le point x à la limite x_0 à partir de laquelle on prend les dérivées. Comme l'on voit, la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit pourra en général se développer de deux manières en série convergente. Souvent l'un des développements sera impossible, tandis que l'autre le sera; quelquefois ils seront, eu égard à la limite choisie x_0, impossibles tous deux.

L'application de la règle de Leibnitz permettra de généraliser une foule de formules importantes : elle permettra, par exemple, d'obtenir très simplement la formule de Vandermonde connue sous le nom de *binôme des factorielles*. On obtient cette formule en différentiant n fois les deux membres de l'équation identique

$$x^{a+b}=x^a x^b,$$

ce qui donne, en prenant pour limite $x_0=0$,

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a+b-n+1)}&=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)}+\frac{n}{1}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+2)}b\\&+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+3)}b(b-1).\end{aligned}\right.$$

Pour que cette formule ait lieu, il faut que la fonction x^b soit monodrome, monogène, finie et continue à l'intérieur d'un cercle ayant son centre en x et pour rayon la droite ox. C'est ce qui aura lieu si l'exposant b est entier et positif.

Dans le cas où b est un nombre quelconque, la formule (1) cesse d'avoir lieu; mais il est aisé de la corriger en ajoutant aux dérivées qui entrent dans la formule les termes nécessaires pour modifier la limite à partir de laquelle elles sont prises : la nouvelle limite x_0 devra être telle que le cercle de rayon xx_0 ne contienne pas dans son intérieur le point o.

VII.

Le calcul des dérivées à indices quelconques n'est pas un pur objet de curiosité; Liouville et M. Serret en ont fait de très heureuses applications auxquelles il ne manque qu'un peu de précision que les théories précédentes viendront apporter.

On sait qu'un grand nombre d'équations différentielles linéaires s'intègrent au moyen de dérivées lorsque certains paramètres sont entiers : nous citerons, par exemple, les équations auxquelles satisfont les fonctions X_n de Legendre, les fonctions de M. Hermite et en général les fonctions $\varphi_n(x)$ qui satisfont aux équations

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\theta(x)\,dx = 0, \quad \int_b^c \varphi_n(x)\,\theta(x)\,dx = 0,$$

$\theta(x)$ désignant un polynôme de degré inférieur à n.

Pour satisfaire aux équations en question quand le paramètre n, au lieu d'être entier est quelconque, il suffit de remplacer dans les anciennes solutions les dérivées d'ordre entier par des dérivées à indices quelconques.

Ce fait seul justifierait l'introduction du nouvel algorithme dans l'Analyse; mais Liouville a montré que, à l'aide des dérivées à indices fractionnaires, on pouvait encore intégrer l'équation différentielle à laquelle satisfait la série hypergéométrique. Je vais montrer comment on peut, plus généralement, abaisser certaines équations linéaires. Ces équations sont de la forme

$$P_m \frac{d^m y}{dx^m} + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m+1}} + \ldots + P_0 y = 0,$$

P_i désignant en général un polynôme du degré i en x. On posera

$$y = \int_0^x \frac{d^\mu z}{dx^\mu},$$

μ désignant un indice quelconque ; on aura alors

$$P_m \int_0^x \frac{d^{m+\mu} z}{dx^{m-\mu}} + P_{m-1} \int_0^x \frac{d^{m+\mu-1} z}{dx^{m+\mu-1}} + \ldots + P_0 \int_0^x \frac{d^\mu z}{dz^\mu} = 0.$$

Si l'on différentie cette formule avec l'indice $-\mu$, on aura un résultat de la forme

$$P_m \frac{d^m z}{dx^m} + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} z}{dx^{m+1}} + \ldots + Q_1 \frac{dz}{dx} + Q_0 z = 0,$$

Q_{m-1}, Q_{m-2}, ..., Q_0 désignant des polynômes entiers en x contenant le paramètre μ, le premier au premier degré, etc., et Q_0 au degré m. Si l'on pose

$$Q_0 = 0,$$

on aura n valeurs de μ annulant Q_0 et ramenant l'équation proposée à une autre linéaire de même ordre, mais ne contenant plus z, c'est-à-dire susceptible de s'abaisser en prenant $\frac{dz}{dx}$ pour variable.

Le calcul des dérivées à indices quelconques vient ajouter un chapitre au calcul inverse des intégrales définies. Liouville a montré comment on pouvait l'appliquer à la recherche des courbes tautochrones ; je vais montrer comment on peut en faire usage pour résoudre une équation rencontrée par Abel en cherchant à résoudre un problème de Mécanique. Il s'agit de l'équation

$$\varphi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}};$$

$\varphi(a)$ est donné ainsi que a, et il s'agit d'exprimer s en fonction de x. Nous ferons $s = \theta(x)$, et nous aurons

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{\theta'(x)\,dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}};$$

nous en tirons

$$\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\varphi(a) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\int_0^a \frac{\theta'(x)\,dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or le second membre est

$$\int_0^a \frac{d^{-\frac{1}{2}}\theta'(a)}{d^{-\frac{1}{2}}a} \quad \text{et} \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

on a donc

$$\frac{\varphi(a)}{\sqrt{\pi}} = \int_0^a \frac{d^{\frac{1}{2}}\theta(a)}{d^{\frac{1}{2}}\theta(a)};$$

il en résulte

$$\theta(a) = s = \int_0^a \frac{d^{-\frac{1}{2}}\varphi(a)}{\sqrt{\pi}\,d^{-\frac{1}{2}}a} = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\varphi(x)\,dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette solution coïncide avec celle d'Abel.