MAURICE D'OCAGNE

Semi-droites réciproques parallèles à l'axe de transformation

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 23-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__23_1>

SEMI-DROITES RÉCIPROQUES PARALLÈLES A L'AXE DE TRANSFORMATION;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

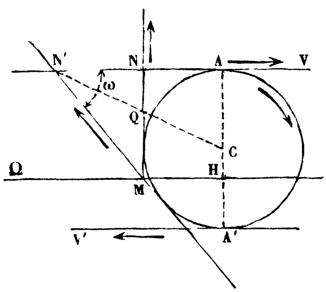
La construction de la semi-droite réciproque d'une semi-droite donnée, qui résulte de la définition (1), n'est

(1) *Nouv. Ann.*, 3e série, t. I, p. 546, § 9.

pas applicable à une semi-droite parallèle à l'axe de transformation. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Le rapport des distances à l'axe* Ω, *de deux semi-droites réciproques parallèles à* Ω, *est égal à la tangente du demi-angle que fait* Ω *avec la réciproque d'une perpendiculaire à cet axe.*

Soient AV et A'V' deux semi-droites réciproques parallèles à l'axe Ω; prenons une semi-droite MN perpen-



diculaire à Ω et sa réciproque MN'. D'après un théorème démontré par M. Laguerre ([1]), ces deux couples de semi-droites sont tangents à un même cycle C.

Cela posé, nous avons

$$AH + A'H = 2AC = 2AN' \tang\frac{\omega}{2},$$

ou, d'après un théorème bien connu, en appelant $2p$ le périmètre du triangle MNN',

$$(1) \qquad AH + A'H = 2p \tang\frac{\omega}{2}.$$

([1]) *Nouv. Ann.*, 3e série, t. I, p. 547.

D'ailleurs,

$$\mathrm{AH} = \mathrm{MN} = \mathrm{MQ} + \mathrm{QN} = \frac{\mathrm{MN}' \sin\frac{\omega}{2}}{\sin \mathrm{Q}} + \mathrm{NN}' \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$$
$$= (\mathrm{MN}' + \mathrm{NN}') \operatorname{tang}\frac{\omega}{2},$$

ou

$$(2) \qquad \mathrm{AH} = (2p - \mathrm{AH}) \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

Retranchant l'égalité (2) de l'égalité (1) membre à membre, nous avons

$$\mathrm{A'H} = \mathrm{AH} \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$$

ou

$$\frac{\mathrm{A'H}}{\mathrm{AH}} = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

L'angle ω étant indépendant des semi-droites parallèles considérées, le théorème est établi.