Nouvelles annales de mathématiques

Desboves

Résolution complète, en nombres entiers, de l'équation générale du second degré, homogène et contenant un nombre quelconque d'inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 225-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__225_0>

RÉSOLUTION COMPLÈTE, EN NOMBRES ENTIERS, DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ, HOMOGÈNE ET CONTENANT UN NOMBRE QUELCONQUE D'INCONNUES;

Par M. DESBOVES.

Nota. — Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons par $(x, y, z, u, \ldots)$ une solution, en nombres entiers, de l'équation proposée, et si $x, y, z, u, \ldots$ n'ont aucun facteur commun, m étant un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul, $(mx, my, mz, mu, \ldots)$ sera considérée comme une solution identique à la première.

1. Je vais d'abord traiter le cas de l'équation homogène du second degré, à trois inconnues, sous sa forme générale

$$(1)\qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0.$$

Admettons que cette équation puisse être résolue en nombres entiers, et soit (x, y, z) une solution connue; ρ, p et q étant trois variables auxiliaires, posons

$$(2)\qquad X = \rho x,\quad Y = \rho y + p,\quad Z = \rho z + q.$$

En remplaçant dans l'équation (1) X, Y, Z par les expressions précédentes, on a

$$\begin{aligned}&[(dp + eq)x + (2bp + fq)y + (2cq + fp)z]\rho\\ &\qquad\qquad\qquad bp^2 + cq^2 + fpq = 0,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\rho = -\frac{bp^2 + cq^2 + fpq}{(dp + eq)x + (2bp + fq)y + (2cq + fp)z};$$

et, en substituant cette valeur de ρ dans les formules (2), on a

$$(3)\quad \begin{cases} X = -(bp^2 + cq^2 + fpq)x, \\ Y = (dx + by + fz)p^2 - cyq^2 + (ex + 2cz)pq, \\ Z = -bzp^2 + (ex + fy + cz)q^2 + (dx + 2by)pq. \end{cases}$$

Remarque. — Si l'on avait posé $X = \rho x + r$, comme il semblait naturel de le faire, on n'aurait pas obtenu de formules plus générales. En effet, si l'on écrit

$$\rho x + r = \rho', \quad \text{d'où} \quad \rho = \rho' - \frac{r}{x},$$

il viendra

$$X = \rho' x, \quad Y = \rho' y + p - \frac{ry}{x}, \quad Z = \rho' z + q - \frac{rz}{x},$$

et ces formules ne diffèrent pas des formules (2) si l'on y considère ρ', $p - \frac{ry}{x}$, $q - \frac{rz}{x}$ comme les variables substituées respectivement à ρ, p, q.

2. Comme on n'a fait aucune hypothèse particulière sur les variables ρ, p, q, il est clair que les formules (3) donnent la solution générale de l'équation (1). On peut d'ailleurs le vérifier *a posteriori* en faisant voir qu'on peut toujours déterminer des valeurs de p et q d'où l'on déduira, à l'aide des formules (3), une solution donnée (X, Y, Z).

En effet, la division, membre à membre, des deux premières équations (3) donne

$$\begin{aligned} c(xY - yX)q^2 &+ [(ex + 2cz)X + fxY]pq \\ &+ [(dx + by + fz)X + bxY]p^2 = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{q}{p} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -[(ex + 2cz)X + fxY] \\ \pm x\sqrt{(e^2 - 4ac)X^2 + 2(ef - 2cd)XY + (f^2 - 4bc)Y^2} \end{array} \right\}}{2c(xY - yX)}.$$

Or, si l'on ajoute le produit par $4c$ du premier membre de l'équation (1) qui est nul à la quantité sous le radical, cette quantité devient le carré de $eX + fY + 2cZ$, et l'on a

$$(4)\quad \frac{q}{p} = \frac{-[(ex+2cz)X + fxY] \pm x(eX+fY+2cZ)}{2c(xY-yX)}.$$

Donc, suivant que l'on prendra le signe + ou le signe — devant le second terme du numérateur, on aura l'un ou l'autre système,

$$(5)\qquad p = xY - yX,\quad q = xZ - zX;$$

$$(6)\quad q = (ex+cz)X + fxY + cxZ,\quad p = c(yX - xY).$$

Mais, pour que l'un ou l'autre système puisse être admis, il faut que les valeurs de p et de q que l'on en tire soient d'accord avec les valeurs déduites de l'équation obtenue en divisant, membre à membre, la première et la dernière équation du système (3). L'équation ainsi formée est la suivante :

$$b(xZ - zX)p^2 + [(dx+2by)X + fxZ]pq \\ + [(ex+fy+cz)X + cxZ]q^2 = 0,$$

d'où l'on tire, par un calcul analogue à celui qui a donné la formule (4),

$$\frac{p}{q} = \frac{-[(dx+2by)X + fxZ] \pm x(dX+2bY+fZ)}{2b(xZ-zX)},$$

et, suivant que l'on prendra le signe + ou le signe — devant le second terme du numérateur, on aura

$$(7)\qquad p = xY - yX,\quad q = xZ - zX;$$

$$(8)\quad p = (dx+by)X + bxY + fxZ,\quad q = b(zX - xZ).$$

Les formules (5) et (7) étant identiques, on voit qu'on pourra déterminer p et q par les formules (5). On s'assure, du reste, qu'en combinant autrement l'une des formules (5) et (6) avec l'une des formules (7) et (8) on tombe sur une impossibilité.

On vérifie aisément que les formules (5) satisfont à la question ; car, si l'on remplace dans les formules (3) p et q par les valeurs que donnent les formules (5), les seconds membres des formules (3) deviennent égaux respectivement à X, Y, Z multipliés par

$$x^2[(2ax + dy + ez)X + (dx + 2by + fz)Y + (ex + fy + 2cz)Z].$$

Remarque. — Lorsque la solution que l'on veut reproduire est la solution connue elle-même (x, y, z), si l'on représente par F le premier membre de l'équation (1) dans lequel on remplace X, Y, Z par x, y, z, le second facteur de l'expression précédente devient

$$\frac{dF}{dx}x + \frac{dF}{dy}y + \frac{dF}{dz}z,$$

c'est-à-dire, d'après le théorème des fonctions homogènes, 2F ou zéro; mais alors les seconds membres des équations (3) doivent encore être considérés comme donnant la solution (x, y, z).

3. Faisons une application des formules (3) à l'équation

$$(9) \qquad 15X^2 - 7Y^2 = 23Z^2.$$

Gauss [1], qui s'est occupé de la résolution de cette équation, obtient, par les méthodes qui lui sont propres, les deux solutions (3, 4, 1), (9, 11, 4). Servons-nous de la première pour obtenir les formules qui correspondent à l'équation (9). Il suffit pour cela de faire dans les formules (3) $a = 15$, $b = -7$, $c = -23$, $d = 0$, $e = 0$, $f = 0$, $x = 3$, $y = 4$, $z = 1$. On a alors les formules

[1] *Disquisitiones arithmeticæ*, p. 357.

demandées

$$(10)\quad \begin{cases} \pm X = 3(7p^2 + 23q^2), \\ \pm Y = -28p^2 + 92q^2 - 46pq, \\ \pm Z = 7p^2 - 23q^2 - 56pq. \end{cases}$$

Si l'on veut ensuite obtenir les valeurs de p et q auxquelles correspondent respectivement pour X, Y, Z les valeurs 9, 11, 4, on remplacera dans les formules (5) x, y, z, X, Y, Z respectivement par 3, 4, 1, 9, 11, 4, et l'on aura, après la suppression d'un facteur commun,

$$p = -1, \quad q = 1.$$

Mais, en remplaçant dans les formules (10) p et q par -1 et 1, on obtient

$$X = 90, \quad Y = 110, \quad Z = 40,$$

c'est-à-dire la solution (9, 11, 4).

Remarque. — Quand l'équation (3) ne contient que les carrés des inconnues, on peut donner le signe + ou — à x, y, z, et deux solutions, dans lesquelles une ou plusieurs inconnues diffèrent par le signe seulement, doivent être considérées comme identiques. Il suit de là que, dans le cas dont il s'agit, on peut aussi calculer p et q par les formules

$$p = xY + yX, \quad q = xZ + zX.$$

Ainsi, dans l'exemple de Gauss, si l'on applique les formules précédentes pour retrouver la solution (9, 11, 4), on aura

$$p = 23, \quad q = 27,$$

et les valeurs de X, Y, Z que l'on obtiendra seront respectivement égales à 9, 11, 4 multipliés par le produit 23×70.

En faisant $p = 1$, $q = 1$ dans les formules (10), on a encore une solution très simple (5, 1, 4).

4. Nous allons maintenant considérer deux cas particuliers :

Premier cas. — *La somme des coefficients dans l'équation* (1) *est égale à zéro.*

Alors l'équation (1) admet la solution (1, 1, 1), et l'on obtient les formules demandées en remplaçant dans les formules (3) x, y, z par 1.

Deuxième cas. — *La somme des coefficients des carrés de deux inconnues et de leur produit est nulle dans l'équation* (1).

On a, par exemple,

$$a + c + e = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (1) admet la solution (1, 0, 1), et, si l'on remplace dans les formules (3) x, y, z, respectivement, par 1, 0, 1, ces formules deviennent

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= -(bp^2 + cq^2 + fpq), \\ Y &= (d+f)p^2 + (c-a)pq, \\ Z &= -bp^2 - aq^2 + dpq. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs les formules (5) donnent en même temps

$$(12) \qquad p = Y, \quad q = Z - X.$$

Dans le cas de l'équation

$$(13) \qquad X^2 + bY^2 + dXY = Z^2,$$

on doit faire dans les formules (11) $e = 0$, $f = 0$, $a = 1$, $c = -1$, et l'on a

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \pm X &= q^2 - bp^2, \\ \pm Y &= dp^2 - 2pq, \\ \pm Z &= bp^2 + q^2 - 2dpq. \end{aligned} \right.$$

Ces formules sont, comme on le voit, identiques à celles que l'on obtient par la méthode des identités; car il suffit dans ces dernières de remplacer x, y, a respectivement par q, $-p$ et d [1].

5. Si l'on fait $d=0$ dans l'équation (13) et les formules correspondantes (14), on a

$$(15)\qquad X^2+bY^2=Z^2,$$

$$(16)\qquad \pm X=q^2-bp^2,\quad \pm Y=2pq,\quad \pm Z=q^2+bp^2$$

et les formules (16) donnent toutes les solutions de l'équation (15). Ordinairement on résout cette équation en l'écrivant d'abord sous la forme

$$Z^2-X^2=bY^2,$$

et, si l'on décompose b de toutes les manières possibles en deux facteurs premiers entre eux α, β, on est conduit à poser

$$Y=2pq,\quad (Z+X)(Z-X)=4\alpha\beta p^2q^2,$$

d'où

$$Z+X=2\alpha q^2,\quad Z-X=2\beta p^2,$$

et l'équation (15) est résolue par l'un quelconque des systèmes

$$(17)\qquad \pm X=\alpha q^2-\beta p^2,\quad \pm Y=2pq,\quad \pm Z=\alpha q^2+\beta p^2,$$

que l'on obtient en décomposant b en deux facteurs α, β premiers entre eux. Mais le système (16), qui correspond à la décomposition de b dans les deux facteurs 1 et b, donne toutes les solutions de l'équation (15). Il est donc inexact de dire, comme le fait Legendre et comme l'ont répété après lui la plupart des auteurs, que « la solution générale comprend autant de formules particulières qu'il y a de manières de décomposer b en deux facteurs

---

[1] *Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation* $aX^m+bY^m=cZ^n$ (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 265).

premiers entre eux ([1]) ». D'ailleurs on voit aisément que chacun des systèmes (17) donne à lui seul toutes les solutions de l'équation (15); car, si dans l'un des systèmes (17) on multiplie les seconds membres par α et que l'on change αq en q, on retombe sur les formules (16).

Cependant, lorsque l'on veut avoir les solutions de l'équation (15) sous leur forme la plus simple, c'est-à-dire telles que X, Y, Z n'aient plus aucun facteur commun, il est bon quelquefois d'employer les systèmes (17). On obtient ainsi un groupement de solutions qui peut être avantageux dans certaines questions. Ainsi, soit l'équation

$$X^2 - Y^2 = 30Z^2, \tag{18}$$

considérée par Legendre ([2]). On aura les systèmes

$$\left\{\begin{array}{lll} X = p^2 + 30q^2, & Y = p^2 - 30q^2, & Z = 2pq; \\ X = 2p^2 + 15q^2, & Y = 2p^2 - 15q^2, & Z = 2pq; \\ X = 3p^2 + 10q^2, & Y = 3p^2 - 10q^2, & Z = 2pq; \\ X = 5p^2 + 6q^2, & Y = 5p^2 - 6q^2, & Z = 2pq. \end{array}\right. \tag{19}$$

Dans le premier système on donnera à q une valeur quelconque et à p toutes les valeurs premières avec 30 et q. Dans le second système on donnera à q une valeur impaire et à p toutes les valeurs premières à q et à 15, etc.

6. Nous avons donné la solution complète, en nombres entiers de l'équation (1). Cependant, pour que la question fût parfaitement résolue, il faudrait pouvoir ranger les solutions dans un ordre déterminé, de telle sorte, par exemple, que l'on fût assuré d'avoir toutes les solu-

---

([1]) Legendre, *Théorie des nombres*, 2e édition, p. 29.
([2]) *Ibid.*

tions dans lesquelles l'une des inconnues est inférieure à un nombre donné. Mais on ne peut guère espérer atteindre ce dernier degré de perfection que pour certaines équations numériques particulières. Soit, par exemple, l'équation (18). On peut d'abord, d'après les formules (19), prendre pour Z tous les nombres pairs rangés par ordre de grandeur croissante, et comme, en général, à chaque valeur de Z correspondent plusieurs systèmes de valeurs de X, Y, on rangera les solutions, correspondant à une même valeur de Z, par rapport aux valeurs croissantes de X. Les formules (19) serviront d'ailleurs à faire la répartition.

Pour obtenir $Z = 2$, on fera $p = 1$, $q = 1$, et l'on aura

$$\left.\begin{array}{ll} X = 11, & Y = 1 \\ X = 13, & Y = 7 \\ X = 17, & Y = 13 \\ X = 31, & Y = 29 \end{array}\right\} Z = 2.$$

On obtient $Z = 4$, en faisant $p = 1$, $q = 2$ ou $p = 2$, $q = 1$, et l'on a

$$\left.\begin{array}{ll} X = 23, & Y = 119 \\ X = 29, & Y = 19 \\ X = 43, & Y = 37 \\ X = 121, & Y = 119 \end{array}\right\} Z = 4.$$

7. Gauss s'est occupé de la résolution de l'équation (1) ([1]). Il donne le moyen d'obtenir la solution complète pour chaque équation numérique particulière; mais il ne résout pas l'équation générale à coefficients indéterminés. Cependant sa méthode convenablement modifiée conduit aussi très simplement aux formules (3).

L'illustre géomètre remarque d'abord que, si dans

([1]) *Disquisitiones arithmeticæ*, p. 366.

l'équation (1) le coefficient du carré d'une des inconnues, a, par exemple, est nul, on pourra donner à Y et à Z des valeurs arbitraires p et q, puis déterminer X par l'équation

$$X = -\frac{(bp^2 + cq^2 + fpq)}{dp + eq}.$$

Alors, en réduisant au même dénominateur les valeurs de X, Y, Z et supprimant le dénominateur commun $dp + eq$, on a

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -(bp^2 + eq^2 + fpq),\\ Y &= p(dp + eq),\\ Z &= q(dp + eq). \end{aligned}\right.$$

On ramène maintenant le cas général au cas précédent en posant

$$(21)\qquad X = xX',\quad Y = yX' + xY',\quad Z = zX' + xZ',$$

(x, y, z) représentant, comme précédemment, une solution connue de l'équation (1) et X′, Y′, Z′ étant de nouvelles variables. [Les formules (21) remplacent les formules S de Gauss ([1])].

Si l'on substitue maintenant dans l'équation (1) à X, Y, Z les expressions données par les formules (21), le coefficient de X'^2 disparaît et on a l'équation

$$\begin{aligned} bxY'^2 + cxZ'^2 &+ (dx + 2by + fz)X'Y'\\ &+ (ex + fy + 2cz)X'Z' + fxY'Z' = 0. \end{aligned}$$

Or, en appliquant à cette équation les formules (21), on a immédiatement

$$\begin{aligned} X' &= -x(bp^2 + cq^2 + fpq),\\ Y' &= (dx + 2by + fz)p^2 + (ex + fy + 2cz)pq,\\ Z' &= (dx + 2by + fz)pq + (ex + fy + 2cz)q^2, \end{aligned}$$

([1]) *Disquisitiones arithmeticæ*, p. 366.

et, si l'on remplace dans les formules (21) X', Y', Z' par les valeurs précédentes, on retombe bien sur les formules (3).

8. Traitons maintenant le cas général de l'équation homogène du second degré contenant n variables. Soit

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} aX^2 + bY^2 + cZ^2 + hU^2 + \ldots \\ + dXY + eXZ + fYZ + lXU + \ldots = 0 \end{array}\right.$$

l'équation proposée qu'on suppose résoluble en nombres entiers et dont $(x, y, z, u, \ldots)$ est une solution connue.

Soit représenté par F le premier membre de l'équation (22) dans laquelle on remplace X, Y, Z, ... par des nombres entiers quelconques. Posons

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} X = \rho x + r, \\ Y = \rho y + p, \\ Z = \rho z + q, \\ U = \rho u + s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si l'on remplace dans l'équation (22) X, Y, Z, U, ... par les expressions que donnent les formules précédentes, et que l'on développe d'après le théorème de Taylor, en considérant $r, p, q, s, \ldots$ comme les variables et ρx, ρy, ρz, ρu, ... comme les accroissements, on aura

$$\begin{array}{l} F(x, y, z, u, \ldots)\rho^2 \\ \quad + \left(\dfrac{dF}{dr} x + \dfrac{dF}{dp} y + \dfrac{dF}{dq} z + \dfrac{dF}{ds} u + \ldots\right)\rho \\ \quad + F(r, p, q, s, \ldots) = 0. \end{array}$$

Le coefficient de ρ^2 étant nul, par hypothèse, on tire de l'équation précédente

$$\rho = -\frac{F(r, p, q, s, \ldots)}{\dfrac{dF}{dr} x + \dfrac{dF}{dp} y + \dfrac{dF}{dq} z + \dfrac{dF}{ds} u + \ldots},$$

et en remplaçant ρ par sa valeur dans les formules (23), si l'on pose

$$M = \frac{dF}{dr} r + \frac{dF}{dp} y + \frac{dF}{dq} z + \frac{dF}{du} u - - \ldots,$$

$$N = F(r, p, q, s, \ldots),$$

on obtient les formules

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = Mr - Nx, \\ Y = Mp - Ny, \\ Z = Mq - Nz, \\ U = Ms - Nu. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

ces formules donnent la solution complète de l'équation (22).

Je dis maintenant que, pour obtenir une solution quelconque ($X, Y, Z, U, \ldots$), il suffit de donner aux indéterminées $r, p, q, s, \ldots$ dans les formules (24) les valeurs $X, Y, Z, U, \ldots$ elles-mêmes. En effet, N devient nul quand on y remplace $r, p, q, s, \ldots$ par $X, Y, Z, U, \ldots$, et par la même substitution M prend une valeur M_1 égale à $\frac{dF}{dX} x + \frac{dF}{dY} y + \frac{dF}{dZ} z + \frac{dF}{dU} u + \ldots$; les seconds membres des équations (24) deviennent donc respectivement égaux à $M_1 X$, $M_1 Y$, $M_1 Z$, $M_1 U$, ..., c'est-à-dire qu'on retrouve la solution ($X, Y, Z, U, \ldots$).

On peut aussi obtenir la solution ($x, y, z, u, \ldots$) elle-même en remplaçant $r, p, q, s, \ldots$ respectivement par $x, y, z, u, \ldots$. En effet, M devient alors égale à $\frac{dF}{dx} x + \frac{dF}{dy} y + \frac{dF}{dz} z + \frac{dF}{du} u + \ldots$, c'est-à-dire, d'après le théorème des fonctions homogènes, à $2F(x, y, z, \ldots)$. Les seconds membres des équations (24) deviennent donc respectivement égaux à $x, y, z, u, \ldots$ multipliés par un facteur nul. Mais on admet que l'on supprime ce facteur commun comme s'il n'était pas nul.

9. On peut voir aisément que les formules (24) ne contiennent que $n-1$ variables distinctes. En effet, si l'on pose $\rho x + r = \rho'$, d'où l'on tire $\rho = \rho' - \frac{r}{x}$, et que l'on remplace dans les équations (23) ρ par $\rho' - \frac{r}{x}$, il vient

$$\begin{aligned}
X &= \rho' x,\\
Y &= \rho' y + p - \frac{ry}{x},\\
Z &= \rho' z + q - \frac{rz}{x},\\
U &= \rho' u + s - \frac{ru}{x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

ou, en posant

$$p - \frac{ry}{x} = p', \quad q - \frac{rz}{x} = q', \quad s - \frac{ru}{x} = s', \quad \ldots,$$

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned}
X &= \rho' x,\\
Y &= \rho' y + p',\\
Z &= \rho' z + q',\\
U &= \rho' u + s',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.$$

Ces dernières formules ne contiennent plus que les $n-1$ variables p', q', s', ... Il suit de là que, si l'on refait les calculs du paragraphe précédent en employant les formules (25) au lieu des formules (23), les nouvelles formules qui remplaceront les formules (24) s'en déduiront en y faisant $r=0$, car on peut remplacer p', q', s', ... par p, q, s, ... Ainsi les formules (24) conservent la même généralité avec $n-1$ variables seulement.

r étant supposé nul dans les formules (24), demandons-nous quelles valeurs doivent y prendre p, q, s, ... pour que leurs seconds membres donnent la solution (X, Y, Z, U, ...). Si nous remettons pour un moment dans les formules (24), où l'on a fait $r=0, p', q', s', \ldots$ à la place de $p, q, s, \ldots$, il est clair que, pour revenir aux formules (24) elles-mêmes, on devra, dans les nouvelles formules, remplacer $p', q', s', \ldots$ respectivement par $p-\frac{ry}{x}$, $q-\frac{rz}{x}$, $s-\frac{ru}{x}$, ... D'ailleurs, comme on obtient la solution (X, Y, Z, U, ...) en donnant dans les formules (24) à $r, p, q, s, \ldots$ les valeurs X, Y, Z, U, ... elles-mêmes, on devra, dans les nouvelles formules, remplacer $p', q', s', \ldots$ respectivement par

$$\mathrm{Y}-\frac{y\mathrm{X}}{x}, \quad \mathrm{Z}-\frac{z\mathrm{X}}{x}, \quad \mathrm{U}-\frac{u\mathrm{X}}{x}, \quad \ldots,$$

ou, en réduisant au même dénominateur x que l'on supprime, on aura, après avoir effacé les accents de $p', q', s', \ldots$,

$$(26) \qquad p=x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}, \quad q=x\mathrm{Z}-z\mathrm{X}, \quad s=x\mathrm{U}-u\mathrm{X}, \quad \ldots.$$

Ce sont les formules demandées; les formules (5) en sont un cas particulier.

On peut faire une démonstration directe. En effet, remarquons que, si l'on remplace dans les formules (24) r par $x\mathrm{X}-x\mathrm{X}$ et $p, q, s, \ldots$ par les valeurs que donnent les formules (25), en observant que l'on a

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathrm{F}}{dr}x+\frac{d\mathrm{F}}{dp}y+\frac{d\mathrm{F}}{dq}z+\frac{d\mathrm{F}}{ds}u+\ldots\\ &\quad=\frac{d\mathrm{F}}{dx}r+\frac{d\mathrm{F}}{dy}p+\frac{d\mathrm{F}}{dz}q+\frac{d\mathrm{F}}{du}s+\ldots,\end{aligned}$$

il vient pour la valeur M_1 de M

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_1&=\frac{d\mathrm{F}}{dx}(x\mathrm{X}-x\mathrm{X})+\frac{d\mathrm{F}}{dy}(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X})\\ &\quad+\frac{d\mathrm{F}}{dz}(x\mathrm{Z}-z\mathrm{X})+\frac{d\mathrm{F}}{du}(x\mathrm{U}-u\mathrm{X})+\ldots\\ &=x\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\mathrm{X}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}\mathrm{Y}+\frac{d\mathrm{F}}{dz}\mathrm{Z}+\frac{d\mathrm{F}}{du}\mathrm{U}+\ldots\right),\end{aligned}$$

la somme des autres termes étant nulle en vertu du théorème des fonctions homogènes. Calculons maintenant la valeur N_1 de N. On a

$$N_1 = F(xX - xX,\ xY - yX,\ xZ - zX,\ xU - uX,\ \ldots),$$

et, en développant le second membre d'après le théorème de Taylor, $-xX$, $-yX$, $-zX$, $-uX$, ... étant considérées comme les variables et xX, xY, xZ, xU, ... comme les accroissements, on obtient

$$\begin{aligned} N_1 &= -XF(x, y, z, u, \ldots) \\ &\quad - Xx\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right) \\ &\quad + xF(X, Y, Z, U, \ldots) \\ &= -Xx\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right). \end{aligned}$$

Cela posé, le second membre de la première des formules (24), comme r est nul, se réduit à

$$Xx^2\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right).$$

Quant au second membre de la deuxième des formules (24), il devient

$$x\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right)(xY - yX + yX),$$

c'est-à-dire

$$Yx^2\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right).$$

Le calcul est semblable pour les autres équations. On obtient ainsi, dans les seconds membres des formules (24), X, Y, Z, U, ... multipliés par le facteur constant

$$x^2\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{du}U + \ldots\right);$$

la proposition est donc démontrée.