CH. BIEHLER

Sur le calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 218-224
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__218_1>

SUR LE CALCUL DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES DES RACINES D'UNE ÉQUATION;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Pour ramener le calcul des fonctions symétriques rationnelles des racines d'une équation à celui des sommes des puissances semblables de ces racines, on fait usage des propositions suivantes :

1° Toute fonction symétrique rationnelle d'un certain nombre de lettres est le quotient de deux fonctions symétriques entières des mêmes lettres;

2° Toute fonction symétrique entière d'un certain nombre de lettres est une somme de fonctions symétriques homogènes des mêmes lettres;

3° Toute fonction symétrique entière et homogène d'un certain nombre de lettres est composée linéairement de fonctions symétriques de la forme $\Sigma a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, où les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des nombres déterminés, les mêmes pour la même fonction;

4° Enfin, toute fonction symétrique de la forme $\Sigma a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, où $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des nombres déterminés, est une fonction rationnelle et entière des sommes des puissances semblables des racines.

Nous allons, dans ce qui suit, donner une démonstration des premières de ces propositions.

2. Considérons le cas d'une fonction symétrique rationnelle de deux lettres,

$$\frac{f(a, b)}{F(a, b)}.$$

Nous allons démontrer que, si l'on a, quels que soient a et b,

$$\frac{f(a, b)}{F(a, b)} = \frac{f(b, a)}{F(b, a)},$$

on aura séparément

$$f(a, b) = f(b, a),$$
$$F(a, b) = F(b, a).$$

Nous nous appuierons pour cela sur la proposition suivante, bien connue : Si la fraction irréductible $\frac{f(x)}{F(x)}$ est égale, quel que soit x, à une fraction $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$, les deux fonctions $f_1(x)$ et $F_1(x)$ sont égales respectivement à $f(x)$ et $F(x)$ multipliées par un même polynôme entier.

Soit b_0 une valeur de b, telle que $f(a, b_0)$ et $F(a, b_0)$ ne puissent s'annuler simultanément pour aucune valeur de a; c'est-à-dire, supposons que b_0 ne soit pas l'une des valeurs de b faisant partie du système des solutions communes aux deux équations

$$f(a, b) = 0,$$
$$F(a, b) = 0.$$

On aura

$$\frac{f(a, b_0)}{F(a, b_0)} = \frac{f(b_0, a)}{F(b_0, a)};$$

$\frac{f(a, b_0)}{F(a, b_0)}$ est une fraction irréductible en a; car nous supposons $\frac{f(a, b)}{F(a, b)}$ débarrassée de tout facteur en a ou b commun au numérateur et au dénominateur, et la valeur b_0 ne donne pas, dans l'hypothèse faite, de facteur commun à $f(a, b_0)$ et à $F(a, b_0)$; par suite, $f(b_0, a)$, $F(b_0, a)$ sont respectivement d'un degré en a au moins égal à celui de $f(a, b_0)$ et de $F(a, b_0)$: on pourra donc, en appliquant le théorème précédent, écrire les égalités

$$f(b_0, a) = f(a, b_0)\,\Theta_0(a, b_0),$$
$$F(b_0, a) = F(a, b_0)\,\Theta_0(a, b_0),$$

$\Theta_0(a, b_0)$ étant un polynôme entier en a dont les coefficients sont rationnels en b_0.

Divisons maintenant $f(b, a)$ par $f(a, b)$, en ordonnant les polynômes par rapport aux puissances de a, nous aurons

$$f(b, a) = f(a, b)\,\Theta(a, b) + R(a, b).$$

Si $f(a, b)$ est de degré m en a, $R(a, b)$ sera au plus du degré $m - 1$ en a, et les coefficients des diverses puissances de a dans $R(a, b)$ sont des fonctions rationnelles de b.

Si, dans cette égalité, on fait $b = b_0$, il viendra

$$f(b_0, a) = f(a, b_0)\,\Theta(a, b_0) - R(a, b_0).$$

Mais l'égalité

$$f(b_0, a) = f(a, b_0)\,\Theta_0(a, b_0)$$

nous montre que les m valeurs de a qui annulent $f(a, b_0)$ annulent aussi $f(b_0, a)$, ces valeurs annulent par suite $R(a, b_0)$.

Or $R(a, b_0)$ n'est que de degré $m-1$ en a au plus,

$$R(a, b_0) = r_1(b_0)a^{m-1} + r_2(b_0)a^{m-2} + \ldots + r_{m-1}(b_0);$$

par suite, $R(a, b_0)$ est identiquement nul, et l'on a

$$r_1(b_0) = 0, \quad r_2(b_0) = 0, \quad r_{m-1}(b_0) = 0.$$

Ces égalités ont lieu pour une infinité de valeurs de b_0; comme elles sont algébriques en b_0, les fonctions r_1, r_2, ..., r_{m-1} sont identiquement nulles, par conséquent $R(a, b)$ est identiquement nul et l'on aura, quels que soient a, b,

$$f(b, a) = f(a, b)\,\Theta(a, b),$$

d'où

$$F(b, a) = F(a, b)\,\Theta(a, b).$$

La fonction $\Theta(a, b)$, que nous savons entière en a, est aussi entière en b; car, étant rationnelle en b, on pourrait la mettre sous la forme

$$\Theta(a, b) = \frac{\Theta_1(a, b)}{\varphi(b)},$$

$\varphi(b)$ étant un polynôme en b, tel qu'aucun coefficient de $\Theta_1(a, b)$ ne soit divisible par un facteur de $\varphi(b)$.

Les égalités ci-dessus deviendraient

$$f(b, a) \times \varphi(b) = f(a, b)\,\Theta_1(a, b),$$
$$F(b, a) \times \varphi(b) = F(a, b)\,\Theta_1(a, b);$$

par suite,

$$f(a, b) \quad \text{et} \quad F(a, b)$$

devraient être divisibles par $\varphi(b)$, ce que nous n'avons pas admis.

Si, dans les deux égalités

$$f(b, a) = f(a, b)\,\Theta(a, b),$$
$$F(b, a) = F(a, b)\,\Theta(a, b),$$

on change a en b et b en a, on obtient les suivantes :

$$f(a, b) = f(b, a)\,\Theta(b, a),$$
$$F(a, b) = F(b, a)\,\Theta(b, a),$$

qui nous donnent, en les combinant avec les premières,

$$\Theta(a, b)\,\Theta(b, a) = 1.$$

Comme $\Theta(a, b)$ est une fonction entière de a et de b, il en sera de même de $\Theta(b, a)$, par suite $\Theta(a, b)$ est indépendant de a et b, et les deux fonctions Θ sont égales. Leur produit étant égal à 1, elles ne peuvent être égales qu'à -1 ou à $+1$.

Or on ne peut pas avoir $\Theta(a, b) = -1$, car les égalités

$$f(a, b) = -f(b, a),$$
$$F(a, b) = -F(b, a)$$

donneraient, pour $b = a$,

$$f(a, a) = -f(a, a),$$
$$F(a, a) = -F(a, a);$$

par suite,

$$f(a, a) = 0, \quad F(a, a) = 0.$$

Les deux fonctions f et F admettraient le facteur $a - b$ simultanément, ce qui est contraire à l'hypothèse faite; par conséquent,

$$f(a, b) = f(b, a),$$
$$F(a, b) = F(b, a),$$

et les fonctions $f(a, b)$ et $F(a, b)$ sont symétriques en a et b. La démonstration que nous venons de faire s'applique au cas d'une fonction symétrique rationnelle d'un nombre quelconque de lettres, comme il est aisé de le voir; nous pouvons donc regarder la proposition comme établie d'une manière générale.

3. La seconde proposition peut se démontrer facile-

ment de la manière suivante. Soit $f(a, b, c, \ldots, l)$ la fonction symétrique entière considérée et soit, d'une manière générale, $f_\mu(a, b, c, \ldots, l)$ l'ensemble homogène des termes du degré μ de la fonction proposée.

On aura

$$\begin{aligned} &f(a, b, c, \ldots, l) \\ &\quad = f_m(a, b, c, \ldots, l) + f_{m-1}(a, b, c, \ldots, l) + \ldots \\ &\qquad + f_1(a, b, \ldots, l) + f_0. \end{aligned}$$

Si l'on permute deux lettres quelconques a et b, on aura

$$f(a, b, c, \ldots, l) = f(b, a, c, \ldots, l);$$

et par suite aussi

$$f(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \ldots, \lambda l) = f(\lambda b, \lambda a, \lambda c, \ldots, \lambda l),$$

on a donc les deux égalités

$$\begin{aligned} &f(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \ldots, \lambda l) \\ &\quad = \lambda^m f_m(a, b, c, \ldots, l) + \lambda^{m-1} f(a, b, c, \ldots, l) + \ldots \\ &\qquad + \lambda f_1(a, b, c, \ldots, l) + f_0, \\ &f(\lambda b, \lambda a, \lambda c, \ldots, \lambda l) \\ &\quad = \lambda^m f_m(b, a, c, \ldots, l) + \lambda^{m-1} f(b, a, c, \ldots, l) + \ldots \\ &\qquad + \lambda f_1(b, a, c, \ldots, l) + f_0. \end{aligned}$$

En les retranchant membre à membre, on a, quel que soit λ,

$$\begin{aligned} &\lambda^m[f_m(a, b, c, \ldots, l) - f_m(b, a, c, \ldots, l)] \\ &\quad + \lambda^{m-1}[f_{m-1}(a, b, c, \ldots, l) - f_{m-1}(b, a, c, \ldots, l)] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \lambda[f_1(a, b, c, \ldots, l) - f_1(b, a, c, \ldots, l)] = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients de toutes les puissances de λ doivent donc être nuls, pour tout système de valeurs des lettres $a, b, c, \ldots, l$.

On devra donc avoir

$$f_m(a, b, c, \ldots, l) = f_m(b, a, c, \ldots, l),$$
$$f_{m-1}(a, b, c, \ldots, l) = f_{m-1}(b, a, c, \ldots, l),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_1(a, b, c, \ldots, l) = f_1(b, a, c, \ldots, l),$$

c'est-à-dire que toutes les fonctions

$$f_\mu(a, b, c, \ldots, l)$$

sont symétriques par rapport aux lettres qui y entrent.

4. Pour démontrer la troisième proposition, il suffit de considérer un terme quelconque $Aa^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$ de la fonction symétrique homogène $f_\mu(a, b, c, \ldots, l)$. Si l'on change a en b et b en a, la fonction f_μ ne change pas, mais le terme considéré devient

$$A b^\alpha a^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda;$$

il se trouvait donc primitivement dans la fonction

$$f_\mu(a, b, c, \ldots, l).$$

On montre de même que tous les termes de la fonction symétrique

$$\Sigma a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda,$$

où α, β, ..., λ ont les valeurs précédentes, s'y trouvent; et de plus ils y sont tous multipliés par le même coefficient A; par suite $f_\mu(a, b, c, \ldots, l)$ est une somme de fonctions symétriques de la même forme,

$$f_\mu(a, b, c, \ldots, l) = \Sigma(A\,\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda).$$