NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Concours général de 1883

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 202-205

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__202_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1883.

Mathématiques spéciales.

D'un point P, pris sur une normale en un point A d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds des points B, C, D, E :

1° Trouver l'équation de la sphère S passant par les quatre points B, C, D, E;

2° Trouver le lieu des centres I des sphères S quand le point P se déplace sur la normale au point A, ainsi que la surface engendrée par la droite PI.

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites R, R′, non situées dans un même plan, un plan P parallèle à ces deux droites, et un point A.

On considère tous les cercles qui ont pour centre le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites R et R′ et dont la circonférence rencontre chacune de ces droites R et R′ :

1° Trouver le lieu de la projection du point A sur le plan de chacun de ces cercles;

2° Soient M et M′ les points où la circonférence de l'un des cercles considérés rencontre la droite R et la droite R′; la sphère qui a ce cercle pour grand cercle et la sphère qui a MM′ pour diamètre se coupent suivant ce cercle C; à ce cercle C on mène les tangentes MT, M′T′ aux points M et M′; soit D la droite d'intersection des deux plans RMT, R′M′T′. On demande le lieu de la trace de cette droite D sur le plan P;

3° Trouver le lieu des extrémités du diamètre du cercle C perpendiculaire au diamètre MM′ du même cercle;

4° Plus généralement, trouver le lieu des extrémités d'un diamètre du cercle C faisant avec le diamètre MM′ du même cercle un angle constant donné.

Philosophie.

Étant donnés un triangle ABC et un nombre positif m plus petit que l'unité, on prend sur le côté AB un point C_1, tel que $AC_1 = mAB$; sur le côté BC un point A_1, tel que $BA_1 = mBC$; enfin sur le côté CA un point B_1, tel que $CB_1 = mCA$:

1° Trouver l'aire du triangle $A_1B_1C_1$;

2° On considère une suite indéfinie de triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_pB_pC_p$, ... dont chacun se déduit du précédent comme le triangle $A_1B_1C_1$ se déduit du triangle ABC; trouver la limite de la somme des aires de ces triangles quand le nombre entier p augmente indéfiniment;

3° Étudier les variations de la limite précédente quand le nombre m varie entre 0 et 1;

4° Déterminer la position du point de rencontre des médianes des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_pB_pC_p$, ...

Seconde.

Algèbre. — On donne une pyramide régulière à base carrée SABCD, dont on suppose les faces latérales indéfiniment prolongées au delà du sommet S et au delà de la base ABCD. On coupe la pyramide par un plan parallèle à sa base et l'on construit un parallélépipède droit ayant pour base la section $abcd$ et pour hauteur la distance des deux plans parallèles $abcd$ et ABCD. A quelle distance faut-il mener le plan sécant pour que ce parallélépipède soit un cube?

Discussion du problème; nombre des solutions (on représentera par a le còté AB de la base de la pyramide donnée et par h la hauteur de cette pyramide).

Géométrie. — On donne deux droites A et B quelconques dans l'espace et un plan P perpendiculaire à la droite A. Par cette droite A on mène un plan quelconque Q, et par la droite B un plan R perpendiculaire au plan Q; ces plans Q et R coupent le plan P suivant deux droites, qui se coupent elles-mêmes en un point M. Trouver le lieu que décrit le point M lorsque le plan Q tourne autour de la droite A.

Troisième.

1. On donne deux points fixes sur une circonférence et on les joint par deux cordes à un même point de la circonférence. Au milieu de l'une de ces cordes, on mène une droite qui coupe la seconde sous un angle donné (63° par exemple). On demande le lieu du point d'intersection lorsque le troisième point parcourt la circonférence.

Discuter le problème.

2. Faire voir que l'expression

$$\frac{1.2.3.4\ldots(2m-1)2m}{1.2.3\ldots m.2^{2m}}$$

est égale à

$$\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{7}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}.$$