NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WEILL

# Théorèmes sur trois coniques d'un faisceau linéaire

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 3 (1884), p. 19-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__19_0>

# THÉORÈMES SUR TROIS CONIQUES D'UN FAISCEAU LINÉAIRE;

PAR M. WEILL.

On sait que les coniques qui passent par quatre points fixes sont coupées par une droite fixe en des points formant involution. Considérons une conique et deux cercles quelconques, mais ayant le même centre, et soient AB et CD deux cordes communes à la conique et au premier cercle, et M, N, P, Q les quatre points communs à la conique et au deuxième cercle; menons MN, qui rencontre le premier cercle, en $\alpha$ et $\beta$, et les cordes AB et CD, en $\gamma$ et $\delta$. La conique, le premier cercle et le système des droites AB, CD constituent trois coniques d'un faisceau linéaire : donc la droite MN les rencontre en six points $\gamma$, $\alpha$, M, N, $\beta$, $\delta$ en involution; l'un des points doubles de cette involution est à l'infini, car le milieu de MN est aussi le milieu de $\alpha\beta$, puisque les deux cercles sont concentriques; donc ce milieu est aussi le milieu du segment $\gamma\delta$. On en conclut qu'il existe une conique passant par M, N, P, Q et ayant AB et CD pour asymptotes. On peut alors énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Étant donnés quatre points* M, N, P, Q *communs à un cercle et à une conique, il existe une conique passant en* M, N, P, Q *et ayant pour asymptotes deux cordes* AB *et* CD, *communes à la conique et à un cercle quelconque concentrique au premier.*

THÉORÈME II. — *L'enveloppe des asymptotes des coniques passant par quatre points fixes* M, N, P, Q, *communs à un cercle et à une conique fixe, coïncide avec l'enveloppe des cordes communes à la conique fixe et à une série de cercles concentriques au premier.*

**Théorème III.** — *Les quatre points où les asymptotes d'une conique variable passant par quatre points fixes* M, N, P, Q *communs à un cercle et à une conique donnés rencontrent cette conique sont sur un cercle concentrique au premier.*

En transformant ce dernier théorème par homographie, on obtient le théorème que nous avions principalement en vue et qui s'énonce ainsi :

**Théorème IV.** — *Étant données trois coniques ayant les mêmes points communs* M, N, P, Q, *deux tangentes quelconques en* $\alpha$ *et* $\beta$ *à la première rencontrent la deuxième en* A, B, C, D ; *il existe une conique passant par* A, B, C, D *et bitangente à la troisième conique fixe aux points* I *et* J *où cette troisième conique est rencontrée par la droite* $\alpha\beta$.

Ce théorème est très général et susceptible d'applications nombreuses. Nous allons énoncer quelques-uns des résultats auxquels il conduit.

**Théorème V.** — *Étant donnés une conique fixe* C *et deux points fixes* A, B, *on mène par* A *et* B *une conique quelconque* C′ *qui rencontre la première en* M, N, P, Q ; *les points doubles de l'involution déterminée sur la droite* AB *par les coniques passant par* M, N, P, Q *sont des points fixes, quelle que soit la conique* C′.

**Théorème VI.** — *Les cordes* IJ *de contact d'une conique fixe* C *et des coniques passant par deux points fixes* A, B *et bitangentes à* C *forment deux faisceaux distincts. Les sommets de ces faisceaux sont les points* M, N *situés sur* AB, *et harmoniques conjugués par rapport à* AB, *et par rapport aux deux points de rencontre de la droite* AB *et de la conique* C.

Théorème VII. — *Il existe quatre coniques bitangentes à une conique* C *et passant par trois points donnés* P, Q, R ; *si l'on prend les points* $\alpha$, $\beta$ *conjugués harmoniques par rapport à* PQ, *et par rapport aux deux points de rencontre de la droite* PQ *et de la conique* C, *et si l'on opère de même pour* QR *et* PR, *on aura six points* $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$, $\alpha''$, $\beta''$, *formant les sommets d'un quadrilatère complet; les côtés de ce quadrilatère sont les quatre cordes de contact.*

Théorème VIII. — *Étant données trois coniques inscrites dans le quadrilatère, si, de deux points* A *et* B *de la première, on mène des tangentes à la deuxième, il existe une conique tangente à ces quatre tangentes et bitangente à la troisième conique donnée, et le pôle de la corde de contact coïncide avec le pôle de* AB *par rapport à la première conique.*

Théorème IX. — *Étant données deux coniques inscrites dans le même quadrilatère, si, de deux points* A *et* B *de la première, on mène des tangentes à la deuxième, il existe une conique tangente à ces quatre droites et passant par deux sommets opposés* P, Q *du quadrilatère donné; le pôle de* PQ *par rapport à la conique coïncide avec le pôle de* AB *par rapport à la conique fixe passant par* A *et* B.

Théorème X. — *Étant données deux coniques homofocales, si, de deux points* A *et* B *de l'une, on mène des tangentes à l'autre, il existe une conique passant par les foyers communs et tangente à ces quatre tangentes; le pôle de* FF' *par rapport à cette conique coïncide avec le pôle de* AB *par rapport à la conique passant par* A *et* B.

Théorème XI. — *Étant données deux coniques ho-*

*mofocales, si, de deux points* A *et* B *de l'une, on mène des tangentes à l'autre, on forme un quadrilatère circonscriptible à un cercle; le centre de ce cercle est le pôle de* AB *par rapport à la conique passant par* A *et* B; *deux sommets opposés du quadrilatère formé par les quatre tangentes sont sur une conique homofocale aux proposées.*

Ce dernier théorème, énoncé par Chasles, donne immédiatement les propriétés métriques relatives aux foyers.

Du théorème I, on déduit les suivants :

Théorème XII. — *Soient* AB, CD *deux cordes communes à une conique et à un cercle, soit* P *le centre du cercle; si, du point* P, *on abaisse une normale* PK *sur la conique, la tangente à la conique au point* K *rencontre* AB *et* CD *en deux points équidistants du point* K.

Théorème XIII. — *Étant donné un quadrilatère inscriptible* ABCD, *on considère deux couples de côtés,* AB, CD *d'une part, et* AC, BD *d'autre part. Les droites variables, sur lesquelles les deux couples interceptent des segments égaux* PQ, RS, *ont pour enveloppe une courbe dont la podaire, par rapport au centre* O *du cercle, est une hyperbole équilatère passant par* O. *Le lieu du milieu* K *du segment* PR, *qui est aussi le milieu de* QS, *est cette même hyperbole équilatère, qui n'est autre que le lieu des pieds des normales abaissées du point* O *sur toutes les coniques passant par* ABCD; *enfin, cette hyperbole équilatère est aussi le lieu des centres des coniques passant par* ABCD.

Théorème XIV. — *Étant données trois surfaces du second ordre passant par la même courbe gauche du quatrième ordre, on mène en deux points* P *et* Q *de la* *surface* S *les plans tangents; il existe une surface du second ordre passant par les coniques d'intersection de ces plans tangents avec la surface* $S_1$ *et bitangente à la surface* $S_2$ *aux points où elle est rencontrée par la droite* PQ.

Pour démontrer ce théorème, dont on peut déduire le théorème IV, en faisant une section plane, considérons la surface

$$S = A\alpha^2 + A_1\beta^2 + 2B\alpha\beta + 2D\gamma\delta = 0.$$

Soit $S_1 = 0$ la deuxième surface. La troisième surface $S_2 = 0$ pourra s'écrire

$$S_2 = A\alpha^2 + A_1\beta^2 + 2B\alpha\beta + 2D\gamma\delta + \lambda S_1 = 0,$$

d'où l'*identité*

$$S_2 - (A\alpha^2 + A_1\beta^2 + 2B\alpha\beta) = \lambda S_1 + 2D\gamma\delta.$$

Cette identité démontre le théorème énoncé; en effet, le premier membre représente une surface bitangente à la surface $S_2$, la corde de contact passant par l'intersection PQ des plans $\alpha = 0$, $\beta = 0$; le second membre représente une surface passant par l'intersection de la surface $S_1$ et des plans $\gamma = 0$, $\delta = 0$ qui sont justement tangents à la surface S aux points P et Q. Ce théorème, d'une démonstration si simple, a de nombreuses conséquences, que l'on développe aisément.