NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Relation entre les distances deux à deux de quatre points d'un cercle ou de cinq points d'une sphère

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 196-198

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__196_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

RELATION ENTRE LES DISTANCES DEUX A DEUX DE QUATRE POINTS D'UN CERCLE OU DE CINQ POINTS D'UNE SPHERE;

PAR M. H. FAURE.

Lorsqu'il s'agit de trouver ces relations en évitant l'emploi de la multiplication des déterminants, on peut employer le procédé suivant : soient

$$A = B = C = D = 0$$

les équations de quatre cercles, mises sous la forme ordinaire $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

L'équation

$$aA + bB + cC \quad dD = 0, \tag{1}$$

dans laquelle a, b, c, d sont des constantes, représentera un cercle quelconque. Prenons quatre points sur ce cercle et désignons par A_r, B_r, C_r, D_r les puissances de l'un de ces points r par rapport aux cercles A, B, C, D. On aura

$$aA_r - bB_r + cC_r + dD_r = 0.$$

Donnons à r les valeurs 1, 2, 3, 4, puis éliminons les constantes entre les quatre équations ainsi obtenues ; on obtient la relation

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Supposons maintenant que les cercles A, B, C, D aient respectivement pour centre les points 1, 2, 3, 4 et que de plus leurs rayons soient nuls, on aura la relation cherchée.

La même démonstration s'applique à cinq points d'une sphère.

Remarque. — Si, au lieu de considérer quatre cercles A, B, C, D, on en suppose un nombre quelconque n, on trouvera, de la même manière, au lieu du déterminant (1), un déterminant à n^2 éléments, duquel nous déduirions une relation entre les carrés des distances de n points pris sur un cercle ou sur une sphère. Si généralement on désigne par rs la distance de deux points, on arrive à la relation

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & \ldots & (1n)^2 \\ (21)^2 & 0 & (23)^2 & \ldots & (2n)^2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (n1)^2 & (n2)^2 & (n3)^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut, au moyen de la transformation inverse. déduire de là une relation entre les carrés des distances d'un nombre $n-1$ de points situés sur une droite ou sur un plan. Prenons pour pôle de transformation le dernier point n, puis divisons tous les termes du déterminant (2) par les termes correspondants de la $n^{\text{ième}}$ ligne, sauf par le dernier o; divisons ensuite les termes des déterminants par les termes de la $n^{\text{ième}}$ colonne, sauf par le dernier o; un terme quelconque $(rs)^2$ du déterminant devient $\dfrac{(rs)^2}{(nr)^2(ns)^2}$ et, d'après la propriété fondamentale de la transformation inverse, ce terme a pour valeur le carré de la distance des points transformés de r et s multiplié par une constante. Si donc nous conservons les mêmes lettres pour indiquer les points transformés, nous aurons entre les distances d'un nombre quelconque de points pris sur une droite ou sur un plan la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & \ldots & 1 \\ (21)^2 & 0 & (23)^2 & \ldots & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il résulte évidemment de la démonstration que sur une droite le nombre des points est au moins égal à 3 et sur un plan au moins égal à 4.