Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 153-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__153_0>

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Permettez-moi quelques mots de réponse à la critique de M. le Dr Peano (1), à laquelle M. Jordan n'aurait eu aucune peine à répondre lui-même, s'il n'eût probablement aperçu derrière quelque difficulté plus subtile.

J'observe d'abord qu'il n'est pas nécessaire que les ε tendent vers zéro pour *tout* mode de division de l'intervalle h en parties indéfiniment décroissantes δ; il suffit que cela ait lieu pour *un* mode de division, et le théorème dont il s'agit sera démontré. M. Peano suppose, dans sa critique et dans son exemple, que les quantités a_r ne sont pas des valeurs *fixes* de la variable x. Or, rien n'empêche de concevoir que l'on fasse décroître les intervalles entre les valeurs consécutives de x, tout en supposant celles-ci fixes, en intercalant entre elles de nouvelles valeurs de x qui resteront fixes à leur tour, entre celles-ci de nouvelles valeurs également fixes, et ainsi de suite indéfiniment (2). Les intervalles δ, toujours subdivisés, pourront décroître au-dessous de toute grandeur donnée, et chaque valeur intercalée x restant fixe, le rapport

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\varphi(x,\delta)$$

ne pourra tendre, pour chacune d'elles, vers une limite différente de $f'(x)$. A moins donc que, pour *tout* mode

(1) *Nouvelles Annales*, janvier 1884.

(2) C'est bien là, à en juger par les termes, la pensée de M. Jordan.

de division de l'intervalle h en parties indéfiniment décroissantes δ, la différence

$$\varphi(x, \delta) - f'(x)$$

ne reste supérieure à une limite fixe pour un nombre fini ou indéfiniment croissant de valeurs de x, quand tous les intervalles δ tendent simultanément vers zéro, la démonstration poura toujours se faire de la même manière.

Ce n'est pas le cas, on le voit sans peine, pour la fonction

$$x^2 \sin \frac{1}{x};$$

aussi le théorème contesté lui est-il parfaitement applicable. En faisant $a_1 = \frac{1}{2n\pi}$ et $a_2 = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ et faisant par conséquent tendre simultanément a_1 et a_2 vers zéro, M. Peano introduit arbitrairement une condition inutile. La démonstration ne peut se faire *par cette voie,* voilà tout.

M. Peano croit qu'il est facile de démontrer la formule

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x - \theta h),$$

sans supposer la continuité de la dérivée. M. Jordan demande, non sans malice, à voir cette démonstration, laquelle est impossible, puisque le théorème est inexact.

Supposons une fonction $f(x)$ égale à $\sqrt{2px}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, et à $\sqrt{2p(2a - x)}$ depuis $x = a$ jusqu'à $x = 2a$. Cette fonction est continue, mais sa dérivée cesse de l'être pour $x = a$, où elle passe de la valeur $\sqrt{\frac{p}{2a}}$ à la valeur $-\sqrt{\frac{p}{2a}}$.

On a évidemment, h étant $< a$,

$$f(a+h) - f(a-h) = \sqrt{2p(a-h)} - \sqrt{2p(a-h)} = 0:$$

or il n'existe entre $a - h$ et $a + h$ aucune valeur de x pour laquelle $f'(x)$ se réduise à zéro.

Notons que le théorème de M. Jordan reste vrai, au contraire, dans ce cas-ci, car zéro est compris entre les valeurs

$$\sqrt{\frac{p}{2(a-h)}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{p}{2(a-h)}}$$

de $f'(x)$ qui correspondent à $a - h$ et à $a + h$. Et cependant M. Peano pourrait ici renouveler son objection, puisque $f(a + \delta) - f(a - \delta)$ n'a pas pour limite $f'(a)$ lorsque δ tend vers zéro.

Ph. Gilbert,
Professeur à l'Université de Louvain.