Nouvelles annales de mathématiques

Concours d'agrégation des sciences mathématiques de 1883

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 146-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__146_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1885.

COMPOSITIONS D'ADMISSIBILITÉ.

Mathématiques spéciales.

D'un point donné P on mène des normales à un ellipsoïde donné :

1° Démontrer que par les pieds de ces six normales on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre S concentriques à l'ellipsoïde;

2° Trouver le lieu que doit décrire le point P pour que les surfaces S soient de révolution;

3° Déterminer le cône lieu des axes de révolution des surfaces S;

4° Sur la section de ce cône, par un plan perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface S est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, un cône, un cylindre ou un système de deux plans parallèles.

Mathématiques élémentaires.

Trouver la hauteur AB et les bases AD, BC d'un trapèze rectangle ABCD, connaissant la longueur l du côté oblique CD, l'aire a^2 du trapèze et le volume $\frac{4}{3}\pi b^3$ engendré par la révolution de la figure autour de CD.

Discuter les formules trouvées et déterminer le minimum et le maximum de b^3. On examinera les cas particuliers suivants :

$$l = a, \quad l = 3a.$$

Composition sur certaines parties, désignées à l'avance, du programme de la licence ès sciences mathématiques.

Théorie. — On donne un corps quelconque, dont les diverses parties sont douées d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et l'on admet, comme préalablement démontré, que les composantes de l'attraction exercée sur un point M, ayant pour coordonnées x, y, z, sont représentées, à un facteur constant près, par les dérivées $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$ du potentiel V, relatif au point M. Prouver qu'on a toujours

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varepsilon,$$

ε étant la densité de la masse attirante au point de cette masse qui coïncide avec le point M.

Démontrer que toute fonction U qui, mise à la place de V dans l'équation précédente, satisfait à cette équation, ne diffère pas du potentiel V si elle remplit en outre les conditions suivantes : 1° la fonction U est continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre ; 2° les produits

$$Ux,\quad Uy,\quad Uz,\quad x^2\frac{dU}{dx},\quad y^2\frac{dU}{dy},\quad z^2\frac{dU}{dz}$$

restent finis quand une ou plusieurs des variables x, y, z, deviennent infinies, la masse attirante étant limitée.

Application. — Étant donné un ellipsoïde E, on sait qu'en chaque point de l'espace se coupent trois surfaces du second degré homofocales à E ; désignons par λ, μ, ν les demi-axes de ces surfaces parallèles au grand axe de l'ellipsoïde E. On considère une masse indéfinie douée d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et dont la densité en chaque point est exprimée par une fonction de λ, μ, ν. On demande quelle doit être la forme la plus générale de cette fonction pour que les surfaces de niveau soient des ellipsoïdes homofocaux à E. Cette forme étant trouvée, calculer l'attraction de la masse sur un point quelconque.

COMPOSITIONS FINALES.

Composition sur un sujet de licence.

Sur une courbe plane donnée C, on prend un point A qui ne présente aucune singularité, et l'on rapporte la courbe à la tangente AX et à la normale AY au point A. On suppose, en outre, que les coordonnées d'un point variable M de la courbe C peuvent être développées en séries ordonnées suivant les puissances positives et entières de l'arc AM $= s$. Cela posé, on demande :

1° D'exprimer les coefficients des premiers termes des séries considérées, jusqu'aux termes en s^6 exclusivement, en fonction des valeurs R, R′, R″, R‴ que prennent au point A le rayon de courbure R de la courbe C et ses dérivées par rapport à s;

2° De calculer, en négligeant les termes en s^5, les coordonnées X, Y du point P milieu d'une corde MM′ parallèle à la tangente AX et de longueur infiniment petite. On trouvera

$$X = \frac{R'}{6R}s^2 - \frac{R'^2}{18R^2}s^3 + \frac{21R' + 34R'^3 - 24RR'R'' + 9R^2R'''}{1080R^3}s^5 + \ldots,$$

$$Y = \frac{1}{2R}s^2 - \frac{R'}{6R^2}s^3 + \frac{2R'^2 - 1 - RR''}{24R^3}s^4 + \ldots;$$

3° De calculer la longueur AB du rayon du cercle qui est osculateur au point A à la courbe diamétrale lieu des milieux des cordes de la courbe C parallèles à la tangente AX;

4° De déterminer la courbe C, de telle sorte que, quel que soit le point A pris sur cette courbe, la projection du rayon de courbure AB sur la normale AY soit égale à $\frac{5}{4}$R. On étudiera la forme des courbes satisfaisant à la condition précédente.

Épreuve pratique de calcul.

Résoudre l'équation

$$9x^4 - 14x^2 + 8x - 1 = 0.$$

Composition en Géométrie descriptive.

On donne un tétraèdre régulier SABC, dont la base ABC repose sur le plan horizontal de projection et dont le sommet S est situé au-dessus de ce plan.

Les hauteurs $A\alpha$, $B\beta$ de la face SAB, en tournant la première autour de l'arête SA, la seconde autour de l'arête SB, engendrent deux cônes. On demande de construire les projections des courbes d'intersection de ces deux cônes.

Données. — L'arête du tétraèdre a $0^m,12$, le côté AB de la base ABC fait un angle de 45^o avec la ligne de terre; le sommet C est situé dans cet angle de 45^o et le point D où le côté AB rencontre la ligne de terre est situé à $0^m,07$ du sommet A le plus rapproché de la ligne de terre.

Pour distinguer les parties vues et cachées, on regardera les deux cônes comme des surfaces opaques.

LEÇONS SUR LES MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

1. Mener d'un point donné une normale à une conique à centre. — Discussion.

2. Définition de la fonction a^x. — Étude de cette fonction.

3. Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la courbe d'intersection a des branches infinies.

4. Sections planes de la surface gauche de révolution.

5. Règle des signes de Descartes.

6. Équation du plan tangent à une surface donnée. Problèmes sur les plans tangents aux surfaces du second ordre.

7. Résolution algébrique de l'équation du troisième degré.

8. Application de la théorie des déterminants à la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues. — Discussion. — Cas où les équations sont homogènes.

9. Transformation des équations algébriques, dans le cas où chaque racine de l'équation cherchée est une

fonction rationnelle d'une ou de deux racines de l'équation proposée. — Exemples.

10. Résolution de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$. Application au calcul des côtés des polygones réguliers.

11. Application de la théorie des dérivées à l'étude des fonctions d'une seule variable. — Exemples.

12. Plans principaux et axes d'une surface du second degré.

13. Mener par une droite un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe (Géométrie descriptive).

14. Première leçon sur les fractions continues.

15. Théorème de Sturm.

16. Intersection de deux coniques. — On ramènera la question à la résolution d'une équation du troisième degré.

17. Résumer la marche à suivre pour résoudre une équation algébrique à coefficients numériques. — Méthode d'approximation de Newton.

18. Sections circulaires des surfaces du second degré. — Cas où la surface est rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires quelconques.

LEÇONS SUR LES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

1. Division des nombres entiers.

2. Recherche du rapport de la circonférence au diamètre.

3. Division des polynômes.

4. Mesure des angles.

5. Première leçon sur la mesure des volumes.

6. Résolution et discussion du système des équations $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$.

7. Étude du trinôme $ax^2 + bx + c$.

8. Théorème sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs dont la somme est constante. — Applications.

9. Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

10. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de plusieurs nombres entiers. (On n'emploiera pas la décomposition en facteurs premiers.)

11. Première leçon sur les nombres premiers.

12. Équation bicarrée. — Transformation des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

13. Réduction à deux forces d'un système de forces appliquées à un corps solide. — Conditions d'équilibre.

14. Racine carrée des nombres entiers.

15. Calculer $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$. — Calculer $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ connaissant $\operatorname{tang} a$.

16. Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. — Fractions périodiques.

17. Relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque.

18. Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

— Séparation des racines dans le cas où elles sont réelles.