NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Sur la question 1028

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 144-146

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__144_1>

SUR LA QUESTION 1028;

PAR M. H. FAURE,
Chef d'escadrons d'artillerie en retraite.

Cette question a déjà été traitée plusieurs fois dans les *Nouvelles Annales*, en dernier lieu par M. Doucet (2e série, t. XX, p. 321), qui en a fait l'historique.

On circonscrit à une conique donnée un triangle ayant pour hauteurs les droites qui joignent les sommets aux points de contact avec les côtés opposés : lieu des sommets du triangle, lieu des points de concours des hauteurs.

Soient abc l'un de ces triangles, A, B, C ses angles, a, b, c les longueurs de ses côtés. Prenant ce triangle pour triangle de référence,

$$S = \cos^2 A\,\alpha^2 + \cos^2 B\,\beta^2 + \cos^2 C\,\gamma^2$$
$$- 2\cos A\cos B\cos C\left(\frac{\alpha}{\cos A} + \frac{\beta}{\cos B} + \frac{\gamma}{\cos C}\right) = 0$$

sera l'équation de la conique donnée, car il est aisé de voir que S touche le triangle *abc* aux pieds de ses hauteurs.

Considérons, d'autre part, la conique

$$S' = \cos A\,\beta\gamma + \cos B\,\gamma\alpha + \cos C\,\alpha\beta,$$

circonscrite au triangle *abc*. Je dis que cette conique est fixe, quel que soit le triangle *abc*, satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

La différence $S - S'$ de nos deux équations peut se mettre sous la forme

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)\left(\frac{\cos^2 A}{a}\alpha + \frac{\cos^2 B}{b}\beta + \frac{\cos^2 C}{c}\gamma\right)$$
$$- \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta);$$

d'où il suit que l'équation $S - S' = 0$ représente le lieu des sommets des angles droits circonscrits à S.

Concluons de là que, si nous considérons un triangle *quelconque abc* circonscrit à la conique S, on pourra circonscrire au triangle *abc* une conique S' qui passera par quatre points déterminés de S, ce qui exige que S' soit une conique fixe.

L'équation $S' = 0$ représente donc le lieu des sommets du triangle.

Si l'on veut avoir le lieu des points de concours des hauteurs, il suffit de remarquer que la conique $S + \lambda S' = 0$ passera par le point de concours $\alpha\cos A = \beta\cos B = \gamma\cos C$ des hauteurs du triangle de référence, pour la valeur

$$\lambda = \frac{3\cos A\cos B\cos C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C};$$

donc, pour cette valeur de λ, $S+\lambda S'$ représentera le lieu du point de concours des hauteurs.

Nota. — Si l'on désigne par Δ, Δ', θ, θ' les invariants du système des coniques S et S', on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta &= -4\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C,\\
\Delta' &= 2\cos A \cos B \cos C,\\
\theta &= 4\cos A \cos B \cos C(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C),\\
\theta' &= -(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)^2;
\end{aligned}$$

de là on peut conclure que, pour tous les triangles abc circonscrits à S et dont les hauteurs passent par les points de contact de la conique avec les côtés opposés, les fonctions $\cos A \cos B \cos C$ et $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ restent constantes.