NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Emploi, dans la géométrie trilinéaire, des coordonnées des points circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 140-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__140_1>

EMPLOI, DANS LA GÉOMÉTRIE TRILINÉAIRE, DES COORDONNÉES DES POINTS CIRCULAIRES;

PAR M. H. FAURE.

I. Soient a, b, c les côtés du triangle de référence, A, B, C ses angles, S sa surface, R le rayon du cercle qui lui est circonscrit.

Considérons les deux points ω_1 et ω_2 qui ont pour coordonnées

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1, & \alpha_2 &= -1, \\ \beta_1 &= \cos C + \sin C\sqrt{-1}, & \beta_2 &= \cos C - \sin C\sqrt{-1}, \\ \gamma_1 &= \cos B - \sin B\sqrt{-1}; & \gamma_2 &= \cos B + \sin B\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que : 1° satisfaisant à la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

ces points sont à l'infini; 2° satisfaisant à la relation

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0,$$

ces points sont sur un cercle. Les points ω_1, ω_2 ainsi définis par leurs coordonnées sont donc les points situés à l'infini sur un cercle.

II. A l'aide de ces valeurs, la fonction X

$$\begin{aligned} X = ll' + mm' + nn' - 2\cos A(mn' + nm') \\ - 2\cos B(nl' + ln') - 2\cos C(lm' + ml') \end{aligned}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} X = \tfrac{1}{2}[(l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)(l'\alpha_2 + m'\beta_2 + n'\gamma_2) \\ + (l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2)(l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1)]; \end{aligned}$$

la vérification est facile, en observant que

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2 = 1,$$
$$\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 = -2\cos A, \quad \alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2 = -2\cos B,$$
$$\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 = -2\cos C.$$

En particulier, la fonction Z

$$Z = l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C$$

sera égale au produit

$$(l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)(l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2).$$

III. Cela posé, soit $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ l'équation d'une droite. Convenons de représenter par la notation $D(\alpha\beta\gamma)$ son premier membre et de même par $D'(\alpha\beta\gamma)$ la fonction linéaire $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma$.

1° On sait que si, λ, μ, ν sont les distances des sommets du triangle de référence à une droite quelconque,

$$\begin{aligned}4S^2 = a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 \\ + c^2\nu^2 - 2bc\mu\nu\cos A - 2ca\nu\lambda\cos B - 2\lambda\mu\cos C;\end{aligned}$$

nous pouvons donc écrire

$$4S^2 = (a\lambda\alpha_1 + b\mu\beta_1 + c\nu\gamma_1)(a\lambda\alpha_2 + b\mu\beta_2 + c\nu\gamma_2).$$

2° *Distance d'un point* (α, β, γ) *à la droite*

$$D(\alpha\beta\gamma) = 0.$$

Cette distance δ pourra s'écrire sous la forme

$$\delta = \frac{D(\alpha\beta\gamma)}{\sqrt{D(\alpha_1\beta_1\gamma_1)D(\alpha_2\beta_2\gamma_2)}};$$

car on sait que

$$\delta = \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C}}.$$

Lorsque la droite D est déterminée par deux de ses points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, on a

$$\delta = \frac{|\,\alpha\ \alpha'\ \alpha''\,|}{\sqrt{|\,\alpha_1\ \alpha'\ \alpha''\,|\ |\,\alpha_2\ \alpha'\ \alpha''\,|}},$$

en convenant de représenter par $|\,\alpha\ \alpha'\ \alpha''\,|$ le déterminant des neuf quantités $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ et de même pour les autres.

Si, dans l'expression de δ, on suppose que le point (α, β, γ) coïncide successivement avecc hacun des points circulaires, et que l'on désigne par δ_1 et δ_2 les distances des points ω_1 et ω_2 à une droite quelconque, on trouve

$$\delta_1 . \delta_2 = 1.$$

3° *Angle de deux droites.* — On sait que le cosinus de l'angle θ des deux droites D, D' est donné par la relation

$$\cos\theta = \frac{X}{\sqrt{ZZ'}}.$$

Z' étant ce que devient Z lorsqu'on ajoute un accent aux lettres l, m, n. Nous avons, par conséquent, en introduisant les coordonnées des points circulaires,

$$2\cos\theta = \frac{D(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,D'(\alpha_2\beta_2\gamma_2) + D(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\,D'(\alpha_1\beta_1\gamma_1)}{\sqrt{D(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,D(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\,D'(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,D'(\alpha_2\beta_2\gamma_2)}}.$$

Si les droites sont déterminées par les coordonnées α, β, γ de leur point d'intersection et par les coordonnées α', β', γ', α'', β'', γ'' d'un point pris sur chacune d'elles, on a aussi

$$2\cos\theta = \frac{|\alpha_1\ \alpha\ \alpha'|\,|\alpha_2\ \alpha\ \alpha''| + |\alpha_1\ \alpha\ \alpha''|\,|\alpha_2\ \alpha\ \alpha'|}{\sqrt{|\alpha_1\ \alpha\ \alpha'|\,|\alpha_2\ \alpha\ \alpha''|\,|\alpha_1\ \alpha\ \alpha''|\,|\alpha_2\ \alpha\ \alpha'|}}.$$

Si l'angle θ et les points α', α'' sont donnés, cette relation donne immédiatement l'équation du cercle passant par deux points et capable d'un angle donné.

4° *Distance de deux points m, m' donnés par leurs coordonnées* (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$. — Si, pour abréger, on pose

$$L = \beta\gamma' - \gamma\beta', \quad M = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad N = \alpha\beta' - \beta\alpha',$$

on a la relation

$$\overline{mm'}^2 = \frac{R^2}{S^2}(L^2 + M^2 + N^2 - 2MN\cos A - 2NL\cos B - 2MN\cos C).$$

Nous pouvons donc écrire, à l'aide des coordonnées des points circulaires,

$$\overline{mm'}^2 = \frac{R^2}{S^2}(L\alpha_1 + M\beta_1 + N\gamma_1)(L\alpha_2 + M\beta_2 + N\gamma_2),$$

ou bien

$$\overline{mm'}^2 = \frac{R^2}{S^2} | \alpha_1 \; \alpha \; \alpha' | \; | \alpha_2 \; \alpha \; \alpha' |.$$

Remarque. — Si l'on désigne maintenant par Σ l'aire d'un triangle dont les coordonnées des sommets sont (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, on a

$$2\Sigma = \frac{R}{S} | \alpha' \; \beta \; \gamma |.$$

Si donc nous remplaçons dans la valeur de $\overline{mm'}^2$ les déterminants par leurs valeurs respectives

$$\frac{2S}{R} \omega_1 mm', \quad \frac{2S}{R} \omega_2 mm',$$

on trouvera

$$\overline{mm'}^2 = 4 \omega_1 mm' . \omega_2 mm'.$$