MAURICE D'OCAGNE

# Sur un cas particulier de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 3 (1884), p. 138-140

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__138_1>

# SUR UN CAS PARTICULIER DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Le cas particulier que vise la présente Note est celui de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx_n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = e^{ax},$$

lorsque $a$ est racine d'un certain degré de multiplicité $p$ de l'équation

$$\varphi(\alpha) = \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \alpha + A_n = 0.$$

Quand cette circonstance se présente, la méthode générale, qui consiste à transformer l'équation en posant

$$y = C e^{ax},$$

ne s'applique plus; on a recours à des procédés spéciaux.

Dans son *Cours d'Analyse,* professé à l'École Polytechnique (feuilles lithographiées, 1[re] division, 1881-82, p. 170), M. J. Bertrand traite deux exemples spéciaux du cas présent par des méthodes fort ingénieuses, mais qui ne sont pas générales.

Nous nous sommes posé le problème dans ses termes généraux, et l'on va voir qu'il n'est pas besoin de recourir à ces ingénieux mais difficiles procédés de calcul, grâce au théorème qui suit :

Théorème. — *Si $a$ est une racine d'ordre de multiplicité $p$ de l'équation*

$$\varphi(\alpha) = \alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\alpha + A_n = 0,$$

*l'équation différentielle linéaire*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} A_n y = e^{ax},$$

*admet la solution particulière* $\dfrac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}$.

La démonstration de ce théorème est immédiate. Dans le premier membre de l'équation différentielle, substituons $y = e^{ax}$; il vient l'identité

$$\frac{d^n e^{ax}}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}e^{ax}}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{de^{ax}}{dx} + A_n e^{ax} = e^{ax}\varphi(a).$$

Dérivons $p$ fois les deux membres de cette identité par rapport à $a$, et remarquons que $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{p-1}(a)$ sont nuls; nous aurons

$$\frac{d^n x^p e^{ax}}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}x^p e^{ax}}{dx^{n-1}} + \ldots$$
$$+ A_{n-1}\frac{dx^p e^{ax}}{dx} + A_n x^p e^{ax} = e^{ax}\varphi^p(a)$$

ou

$$\frac{d^n\left[\dfrac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}\right]}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}\left[\dfrac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}\right]}{dx^{n-1}} + \ldots$$

$$+ A_{n-1} \frac{d\left[\dfrac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}\right]}{dx} + A_n \frac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)} = e^{ax},$$

ce qui montre bien que $\frac{x^p e^{ax}}{\varphi^p(a)}$ est une solution particulière de l'équation.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x,$$

traitée par M. Bertrand à l'endroit cité.

1 est racine double de l'équation

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0.$$

D'après le théorème précédent, on aura donc la solution particulière

$$\frac{x^2 e^x}{2},$$

et, par suite, la solution générale sera

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{x^2 e^x}{2}.$$