WEILL

Sur le cercle qui a pour diamètre une corde d'une conique à centre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 136-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__136_1>

SUR LE CERCLE QUI A POUR DIAMÈTRE UNE CORDE D'UNE CONIQUE A CENTRE;

PAR M. WEILL.

THÉORÈME. — *Étant donnée une conique dont le centre est en* O, *si l'on décrit, sur une corde* AB *de cette conique, comme diamètre, un cercle qui rencontre la conique en deux autres points* C *et* D, *le rapport des distances du point* O *aux deux points* P *et* Q *où les deux droites* AB *et* CD *rencontrent le grand axe reste constant et égal à* $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

L'équation d'un cercle passant par les points de rencontre de l'ellipse et de deux droites peut s'écrire

$$\begin{aligned} &b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \\ &\quad + 2(px + qy + k)(px - qy + k') = 0, \end{aligned}$$

avec la condition

$$b^2 + 2p^2 = a^2 - 2q^2.$$

Écrivons que le centre du cercle est sur la première droite, les trois équations

$$\begin{gathered} px + qy + k = 0, \\ a^2 py - b^2 qx = 0, \\ b^2 x + p(px - qy + k') = 0 \end{gathered}$$

seront satisfaites simultanément, et l'élimination de x et y donne

$$\frac{k}{k'} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Le théorème est démontré.

Si la conique donnée est une hyperbole équilatère, on voit que la corde CD passe par le centre, propriété bien connue.

Supposons que la corde AB varie en enveloppant une certaine courbe, la corde CD enveloppera une courbe semblable et qui sera symétrique d'une courbe homothétique à l'enveloppe de AB. Désignons par l et m les distances du point O aux points L, M, où la droite AB rencontre les axes de la conique donnée. Les équations de AB et CD seront

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} - 1 = 0,$$

$$\frac{x}{l} - \frac{y}{m} - \mathrm{H} = 0,$$

H étant une constante.

Si l'équation tangentielle de l'enveloppe de AB est

$$f(l, m) = 0,$$

le lieu du point S de rencontre de AB et CD aura pour équation

$$f\left(\frac{2x}{\mathrm{H}+1}, \frac{2y}{1-\mathrm{H}}\right) = 0.$$

On a ainsi une relation très simple entre l'enveloppe de AB et le lieu de S, et l'on peut passer immédiatement de l'une des courbes à l'autre. On peut examiner des cas particuliers intéressants, tels que celui où AB passe par un point fixe, et celui où AB enveloppe une conique.

On peut déduire facilement du lieu décrit par le point S le lieu décrit par le centre du cercle, et l'équation de l'enveloppe du cercle; en effet, en posant

$$\frac{1}{l} = \lambda, \quad \frac{1}{m} = \mu,$$

l'équation du cercle est

$$\left(\frac{a^2\lambda^2 + \mu^2 b^2}{a^2 - b^2}\right)(x^2 + y^2) - \lambda x(1 + \mathrm{H})$$
$$+ \mu y(1 - \mathrm{H}) + \mathrm{H} - \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}(\lambda^2 + \mu^2) = 0.$$

Si, par exemple, AB passe par un point fixe, le cercle enveloppe une anallagmatique du quatrième degré.