WEILL

Sur la condition pour qu'un polygone soit inscrit et circonscrit à deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 128-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__128_1>

SUR LA CONDITION POUR QU'UN POLYGONE SOIT INSCRIT ET CIRCONSCRIT A DEUX CONIQUES;

PAR M. WEILL.

Je me propose de donner une solution élémentaire de ce problème célèbre, qui consiste à chercher la condition pour qu'il existe un polygone d'un nombre donné de côtés, qui soit inscrit a une conique donnée et circonscrit à une autre conique donnée; on sait que, dans ce cas, il existe une infinité de polygones de ce nombre de côtés, jouissant de la même propriété. Je considère les polygones du système qui sont *infiniment aplatis*.

Premier cas. — Le polygone a un nombre pair de côtés.

Le polygone est inscrit dans la conique U et circonscrit à la conique V, ces deux coniques ayant respectivement pour équations

$$\alpha\beta - \gamma(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0,$$
$$L\alpha\beta - K\gamma^2 = 0.$$

Au point A, commun aux deux coniques, menons à la conique V la tangente qui rencontre la conique U en un second point C; du point C menons à la conique V la seconde tangente qui déterminera sur la conique U un point D, et ainsi de suite. Si, après p opérations, on arrive à un point B commun aux deux coniques, il existera un polygone *infiniment aplati*, de $2p$ côtés, AC, CD, DE, ..., LB, BL, ..., DC, CA, qui sera inscrit dans la conique U et circonscrit à la conique V: donc, en exprimant que la ligne qui part du point A aboutit au point B après p opérations, nous aurons écrit la condition cherchée pour un polygone de $2p$ côtés. Cela posé, cherchons l'équation de la conique à laquelle sont tangents les côtés de la ligne polygonale qui part du point A pour arriver au point B, en passant par les points de contact de la ligne ACD ... B avec la conique V.

En appelant l un paramètre, un point de la conique V est à l'intersection des deux droites

$$\alpha = l\frac{K}{L}\gamma, \quad \beta = \frac{\gamma}{l}.$$

La droite qui joint deux points l, l' a pour équation

$$L\alpha + K\beta\, ll' - 2K\gamma(l + l') = 0.$$

En identifiant cette équation avec celle de la polaire d'un point $(\alpha', \beta', \gamma')$ de la conique U par rapport à la conique V, on a

$$\beta' = 1, \quad \alpha' = \frac{K}{L} ll', \quad \gamma' = \frac{l + l'}{2}.$$

Donc la relation entre l et l' est

$$(1) \qquad -\frac{K}{L} ll' + \frac{l + l'}{2}\left(A \frac{K}{L} ll' + B + C \frac{l + l'}{2}\right) = 0.$$

Cette relation a lieu entre les paramètres l et l' de deux points *consécutifs* de la ligne polygonale dont nous cherchons l'enveloppe. Cette ligne, qui part de A pour arriver en B, a p sommets, et les valeurs du paramètre l, qui correspondent à ces p sommets, sont

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_p.$$

On a

$$l_1 = 0, \quad l_p = \infty.$$

Dans l'équation (1), faisons $l = 0$, nous aurons pour l' deux valeurs : l'une 0 qui est à rejeter; l'autre est

$$l_2 = \frac{-2B}{C}.$$

Cherchons l_3. Il faut, dans l'équation (1), remplacer l' par la valeur que nous venons de trouver pour l_2, et l'équation du second degré en l donnera l_1 et l_3. Il faut trouver une loi de récurrence. Écrivons l'équation (1) sous la forme

$$M(l + l')^2 + P ll'(l + l') + Q(l + l') + R ll' = 0$$

ou bien

$$(3) \; l^2(M + P l') + l[P l'^2 + l'(2M + R) + Q] + M l'^2 + Q l' = 0.$$

Si l' représente l_3 dans cette équation, les deux valeurs de l seront l_2 et l_4, et l'on aura

$$l_2 l_4(M + P l_3) - M l_3^2 - Q l_3 = 0,$$
$$(l_2 + l_4)(M + P l_3) + P l_3^2 + (2M + R) l_3 + Q = 0.$$

Éliminons l_3^2, il vient

$$(4)\left\{\begin{array}{l} l_4(M+Pl_3)(M+Pl_2) \\ \quad +Ml_2(M+Pl_3)+(2M^2+RM-PQ)l_3+MQ=0. \end{array}\right.$$

Pour que la ligne polygonale arrive au point B, il faut que l'on ait

$$l_p=\infty,$$

c'est-à-dire que le coefficient de l^2 dans l'équation (3) soit nul, ou enfin que l'on ait

$$M+Pl_{p-1}=0.$$

Ainsi, pour un quadrilatère, on aura

$$l_2=\infty, \quad \text{d'où} \quad C=0.$$

Pour un hexagone $M+Pl_2=0$, d'où $MC-2BP=0$. Posons

$$M+Pl_2=H_1,$$
$$M+Pl_3=H_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La relation (4) peut s'écrire alors

$$H_1H_2H_3+H_2S+T=0,$$

en désignant par S et T des constantes. On aura, en général,

$$H_nH_{n+1}H_{n+2}+H_{n+1}S+T=0.$$

En égalant H_n à zéro, on aura, entre ABCKL, la relation cherchée correspondant à un polygone de $(2n+4)$ côtés. Reste à exprimer, en fonction de ces données, les quantités S, T, H_1 et H_2. On trouve

$$S=\frac{C^2}{16}-\frac{K}{4L}(AB+C),$$

$$T=\frac{C}{8}\left(\frac{ABK}{L}-\frac{C^2}{4}+\frac{CK}{2L}\right),$$

$$H_1=\frac{C^2L-4ABK}{4CL},$$

$$H_2=\frac{C^2L+4ABK}{4CL}-\frac{4ABK^2}{L(C^2L-4ABK)}.$$

Les calculs précédents supposent connue une sécante commune aux deux coniques données; pour exprimer la même condition à l'aide des invariants $\theta, \theta', \ldots$, il suffit de former l'équation en λ des deux coniques U et V, on trouve

$$(5) \qquad K = \frac{\Delta}{L^2}, \quad C = \frac{\theta - \frac{2\Delta}{L}}{L^2}, \quad AB = \Delta' - \frac{\theta - \frac{2\Delta}{L}}{L^2};$$

$$(6) \qquad \Delta' L^3 - \theta' L^2 + \theta L - \Delta = 0.$$

Ayant $H_n = 0$, avec les notations précédentes, il restera à éliminer L entre l'équation (6) et l'équation $H_n = 0$, après qu'on y aura remplacé AB, C, K en fonction de L et des invariants.

Si l_2, l_3, l_4 sont les paramètres de trois sommets consécutifs de la ligne polygonale considérée, on a

$$l_2 l_4 = \frac{M l_3^2 + Q l_3}{M + P l_3},$$

$$l_2 + l_4 = -\frac{P l_3^2 + (2M + R) l_3 + Q}{M + P l_3}.$$

Or la droite qui joint les points l_2, l_4 a pour équation

$$L\alpha + \beta K l_2 l_4 - 2\gamma K (l_2 + l_4) = 0.$$

Si l'on remplace dans cette équation $l_2 l_4$ et $l_2 + l_4$ par leurs valeurs en fonction de l_3, on aura facilement l'équation de l'enveloppe des droites qui joignent de deux en deux les sommets de notre ligne polygonale; cette enveloppe est une conique, comme on le sait. On obtiendrait, mais par des calculs de plus en plus compliqués, la conique enveloppe des droites qui joignent de trois en trois, de quatre en quatre, les sommets de la ligne polygonale.

Deuxième cas. — Le polygone a un nombre impair de côtés.

Il est inscrit dans la conique U et circonscrit à la conique V, lesquelles ont pour équations

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0, \quad (A\alpha + B\gamma)^2 - 2\beta(m\gamma - \alpha) = 0.$$

Un point de la première conique sera à l'intersection des deux droites

$$\beta = \gamma t, \quad \alpha = \frac{\gamma}{t}.$$

Au point A, commun aux deux coniques, menons à la conique V la tangente qui est

$$m\gamma - \alpha = 0.$$

Cette tangente rencontrera la conique U en un point t_2. De ce point, menons à la conique V une tangente qui déterminera sur la conique U un point t_3, et ainsi de suite. Si le point t_p ainsi obtenu se trouve au point B où la droite γ rencontre la droite β et la conique U, c'est que l'on pourra inscrire et circonscrire aux deux coniques un polygone *infiniment aplati* de $(2p - 1)$ côtés; on aura

$$t_1 = \infty, \quad t_p = 0.$$

Par un point t de la conique U, menons les deux tangentes à la conique V, la corde de contact aura pour équation

$$(1) \quad \frac{A(A\alpha + B\gamma) + \beta}{t} - t(m\gamma - \alpha) + B(A\alpha + B\gamma) - m\beta = 0.$$

Un point de la conique V est à l'intersection des droites

$$A\alpha + B\gamma = 2\lambda(m\gamma - \alpha), \quad A\alpha + B\gamma = \frac{\beta}{\lambda}.$$

L'équation (1) donne alors entre t et λ la relation

$$(2) \qquad \lambda^2(1 - mt) + \lambda(A + Bt) - \frac{t^2}{2} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{t^2}{2} + t(\lambda^2 m - \lambda B) - (\lambda A + \lambda^2) = 0.$$

On a

$$t_1 = \infty,\quad \lambda_1 = \infty,\quad t_2 = \frac{1}{m},\quad \lambda_2 = \frac{1}{2m(Am+B)};$$
$$t_p = 0,\quad \lambda_p = 0,\quad \lambda_{p-1} = -A.$$

En général, on a

$$\lambda_k \lambda_{k-1} = \frac{-t_k^2}{2(1-mt_k)},$$
$$\lambda_k + \lambda_{k-1} = \frac{-(A+Bt_k)}{1-mt_k}.$$

En éliminant t_k, il vient, en posant $Am + B = C$,

$$(\lambda_{k-1} + \lambda_k + A)^2 + 2BC\lambda_k\lambda_{k-1} - 2mC\lambda_k\lambda_{k-1}(\lambda_k + \lambda_{k-1}) = 0,$$
$$(\lambda_k + \lambda_{k+1} + A)^2 + \ldots = 0,$$
$$\lambda_{k-1} + \lambda_k + \lambda_{k-1} + A$$
$$- 2mC\lambda_k(\lambda_{k-1} + \lambda_k + \lambda_{k-1}) + \lambda_k(1 + 2BC) = 0.$$

Posons

$$\lambda_k = H_k + \frac{1}{2mC},$$

il vient

$$H_k + H_{k+1} + H_{k+2} + \frac{\alpha}{H_{k+1}} + \beta = 0.$$

Cette formule de récurrence est la même que dans le cas des polygones d'un nombre pair de côtés. En effet, dans ce cas, nous avons trouvé

$$H_n H_{n+1} H_{n+2} + SH_{n+1} + T = 0;$$

on en déduit

$$H_{n+1} H_{n+2} H_{n+3} + SH_{n+2} + T = 0,$$

d'où

$$H_n - H_{n+3} = S\left(\frac{1}{H_{n+1}} - \frac{1}{H_{n+2}}\right),$$

par suite

$$H_2 + H_3 + H_4 - (H_{n+1} + H_{n+2} + H_{n+3}) = S\left(\frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_{n+2}}\right),$$

ou enfin

$$H_{n+1} + H_{n+2} + H_{n+3} + \frac{-S}{H_{n+2}} + \left(\frac{S}{H_3} - H_2 - H_3 - H_4\right) = 0,$$

ce qui démontre l'identité des deux formules de récurrence.

Revenons aux polygones d'un nombre impair de côtés.

La condition pour un polygone de $(2p - 1)$ côtés s'exprimera par $\lambda_p = 0$, c'est-à-dire par

$$H_p = \frac{-1}{2m(Am + B)}.$$

Les constantes α et β ont pour valeurs

$$\alpha = \frac{1 + 2(Am + B)^2}{-4m^2(Am + B)^2}, \quad \beta = \frac{1 - B(Am - B)}{m(Am + B)},$$

$$H_2 = 0,$$

$$-H_3 = \frac{[1 + 2m(Am + B)]^2 + 1 + 2mA(Am + B) + 2(Am + B)^2}{2m(Am + B)[1 + 2mA(Am + B) + 2(Am + B)^2]},$$

$$\lambda_3 = \frac{[1 + 2m(Am + B)]^2}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}.$$

Pour un triangle, le système des deux coniques est

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0, \quad (A\alpha + B\gamma)^2 - 2\beta\gamma = 0.$$

Pour un pentagone,

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0, \quad \left(A\alpha - \gamma\,\frac{1 + 2Am^2}{2m}\right)^2 - 2\beta(m\gamma - \alpha) = 0.$$

Pour un quadrilatère, en revenant au premier cas, on trouve que le système des coniques U et V est représenté par

$$\alpha\beta - \gamma(A\alpha + B\beta) = 0,$$
$$L\alpha\beta - K\gamma^2 = 0.$$

Pour un hexagone, le système est

$$\alpha\beta - \gamma(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0,$$
$$4AB\alpha\beta - C^2\gamma^2 = 0.$$

Pour un octogone, le système est

$$\alpha\beta - \gamma(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0,$$
$$4(\sqrt{A^2B^2 + ABC})\alpha\beta - C^2\gamma^2 = 0.$$

On obtient les cas particuliers en donnant, dans les formules précédentes, des valeurs particulières aux coefficients ainsi qu'aux fonctions linéaires α, β, γ.