

ÉMILE LEMOINE

Sur une question de probabilité

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 118-126

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__118_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉ;

PAR M. ÉMILE LEMOINE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit un triangle ABC; par un point O, pris au hasard à l'intérieur de ABC, on mène une parallèle à

BC qui coupe AC en A_c et AB en A_b ,
CA » BA en B_a et BC en B_c ,
AB » CB en C_b et CA en C_a .

Quelle est la probabilité que l'on puisse former :

- 1° Un triangle;*
- 2° Un triangle acutangle, avec les trois droites OA_c, OB_a, OC_b .*

Désignons OC_b par ξ , OA_c par η , OB_a par ζ .

Pour que l'on puisse former un triangle avec ces trois droites, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned}\xi &< \eta + \zeta, \\ \eta &< \xi + \zeta, \\ \zeta &< \eta + \xi;\end{aligned}$$

désignons par x et y les coordonnées de O, CB étant pris pour axe des x , CA pour axe des y , il est facile de voir

que l'on a

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{cy}{b}, \\ \eta &= x, \\ \zeta &= \frac{ab - bx - ay}{a}.\end{aligned}$$

Si l'on considère : 1° le lieu des points pour lesquels on a

$$\xi = \eta + \zeta,$$

on trouve la droite

$$\frac{cy}{b} = x + \frac{ab - bx - ay}{a};$$

2° le lieu des points pour lesquels on a

$$\eta = \xi + \zeta,$$

on trouve la droite

$$x = \frac{cy}{b} + \frac{ab - bx - ay}{a};$$

3° le lieu des points pour lesquels on a

$$\zeta = \xi + \eta,$$

on trouve la droite

$$\frac{ab - bx - ay}{a} = x + \frac{cy}{b};$$

ou

$$(1) \quad \frac{x}{\frac{ab}{b-a}} + \frac{y}{\frac{b^2}{c+b}} = 1,$$

$$(2) \quad \frac{x}{\frac{ab}{a+b}} + \frac{y}{\frac{b^2}{b-c}} = 1,$$

$$(3) \quad \frac{x}{\frac{ab}{a+b}} + \frac{y}{\frac{b^2}{b+c}} = 1;$$

(2) et (3) se coupent sur CB en A', et l'on a

$$CA' = \frac{ab}{a+b}, \quad A'B = \frac{a^2}{a+b};$$

(1) et (3) se coupent sur CA en B', et l'on a

$$CB' = \frac{b^2}{c+b}, \quad B'A = \frac{bc}{c+b};$$

(1) et (2) se coupent sur AB en C', et l'on a

$$BC' = \frac{ac}{a+c}, \quad C'A = \frac{c^2}{a+c}.$$

Remarquons en passant que les trois droites AA', BB', CC' se coupent en un même point O' dont les coordonnées sont

$$x = \frac{abc}{ab+cb+ac},$$

$$y = \frac{ab^2}{ab+cb-ac};$$

pour ce point O', on a

$$\xi = \eta = \zeta :$$

c'est le point étudié par M. Jérabek (voir *Mathesis*, 1^{re} année, p. 191).

Les trois lieux dérivés des égalités

$$\xi = \eta + \zeta, \quad \eta = \xi + \zeta, \quad \zeta = \eta + \xi$$

forment donc par leurs intersections le triangle A'B'C' inscrit dans ABC et, comme chacun d'eux, $\xi = \eta + \zeta$ par exemple, sépare les points du plan pour lesquels on a

$$\xi > \eta + \zeta$$

de ceux pour lesquels on a

$$\xi < \eta + \zeta,$$

il est évident que, pour tous les points intérieurs au triangle A'B'C', on a

$$\xi < \eta + \zeta.$$

$$\eta < \xi + \zeta.$$

$$\zeta < \eta + \xi.$$

c'est-à-dire que pour ces points on peut former un triangle avec ξ, η, ζ , et la probabilité cherchée sera

$$\frac{\text{aire } A'B'C'}{\text{aire } ABC}$$

ou

$$\frac{S - CA'B' - BA'C' - AB'C'}{S};$$

mais

$$AB'C' = S \frac{c^2}{(c-b)(c+a)},$$

$$BA'C' = S \frac{a^2}{(a+c)(a+b)},$$

$$CA'B' = S \frac{b^2}{(a+b)(c+b)};$$

donc la probabilité est

$$\frac{abc}{(b-c)(a+c)(a+b)}.$$

Si l'on s'était proposé de trouver la probabilité pour que l'on puisse former un triangle avec OB_c, OC_a, OA_b , on aurait trouvé le même résultat et l'on aurait eu à considérer un triangle $A_1B_1C_1$ inscrit dans ABC et tel que les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au second point étudié par M. Jérabek (voir *loc. cit.*).

Voici une autre solution de la même question.

Il est facile d'établir que, pour tout point du triangle ABC , on a entre les droites ξ, η, ζ la relation

$$(1) \quad ab\xi + bc\eta + ac\zeta = abc.$$

Cela posé, considérons trois axes rectangulaires $O\xi, O\eta, O\zeta$; le plan dont l'équation est représentée par (1) coupera $O\xi$ en A_2 , $O\eta$ en B_2 , $O\zeta$ en C_2 , et l'on aura

$$OA_2 = c, \quad OC_2 = b, \quad OB_2 = a.$$

Les trois plans

$$\xi = \eta + \zeta,$$

$$\eta = \xi + \zeta,$$

$$\zeta = \xi + \eta$$

se couperont deux à deux en A'_1 sur B_2C_2 , B'_1 sur A_2C_2 , C'_1 sur A_2B_2 , tels que

$$\begin{array}{lll} OA'_1 & \text{est la bissectrice de} & C_2OB_2, \\ OB'_1 & \text{»} & A_2OC_2, \\ OC'_1 & \text{»} & B_2OA_2, \end{array}$$

et, pour tous les points situés à l'intérieur de $A'_1B'_1C'_1$, on aura

$$\begin{array}{l} \xi < \tau_1 + \zeta, \\ \tau_1 < \zeta + \xi, \\ \zeta < \xi + \tau_1. \end{array}$$

Or, comme à un point de l'intérieur du triangle donné ABC donnant les droites ξ, τ_1, ζ correspond un seul point de l'intérieur de $A_2B_2C_2$ ayant pour coordonnées ξ, τ_1, ζ et réciproquement, la probabilité cherchée sera évidemment

$$\frac{\text{aire } A'_1B'_1C'_1}{\text{aire } A_2B_2C_2}.$$

il est inutile de développer les calculs.

REMARQUE. — On peut prendre ξ, τ_1, ζ avec la relation

$$ab\xi + bc\tau_1 + ac\zeta = abc,$$

ou ξ_1, τ_1, ζ_1 , avec la relation

$$ac\xi_1 + ba\tau_1 + cb\zeta_1 = abc,$$

pour coordonnées d'un point du plan du triangle ABC; comme de plus on a

$$\begin{array}{ll} \xi = \frac{cy}{b}, & \xi_1 = y. \\ \tau_1 = x, & \tau_1 = \frac{cx}{a}, \\ \zeta = \frac{ab - bx - ay}{a}; & \zeta_1 = \frac{ab - bx - ay}{b}, \end{array}$$

(123)

il en résulte que toute relation entre ξ, η, ζ ou ξ_1, η_1, ζ_1 donne une relation du même degré entre x et y .

Ainsi les lieux des points tels que

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.},$$

tels que

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = \text{const.},$$

tels que

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

etc., sont des coniques; tels que

$$\xi + \eta + \zeta = \text{const.},$$

$$\xi + \eta + \zeta + \xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 = \text{const.},$$

etc., sont des droites.

Il en résulte encore que, pour tout point du plan de ABC, on a

$$\xi\eta\zeta = \xi_1\eta_1\zeta_1.$$

Remarquons aussi que l'on retrouve facilement ainsi le point pour lequel les six points $A_c, A_b, B_a, B_c, C_b, C_a$ sont sur une même circonférence, point que nous avons démontré (voir *Nouvelles Annales*, p. 365, 3^o; 1873) être le centre des médianes antiparallèles, en exprimant que l'on a

$$\xi\eta_1 = \zeta\xi_1 = \eta\zeta_1;$$

on trouve que cette valeur commune est

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Citons enfin le théorème suivant que l'on obtient en cherchant le point pour lequel on a

$$\xi\xi_1 = \eta\eta_1 = \zeta\zeta_1.$$

Si l'on divise chaque côté d'un triangle en deux segments proportionnels aux racines carrées des côtés adjacents et que l'on joigne ce point au sommet opposé,

la ligne droite obtenue passe par le point tel que le produit des deux distances de ce point à un côté, distances comptées parallèlement aux deux autres côtés, est constant.

Occupons-nous de la seconde partie de l'énoncé : pour que le triangle formé avec ξ, τ, ζ soit rectangle, il faut que l'on ait

$$\xi^2 < \tau^2 + \zeta^2,$$

$$\tau^2 < \xi^2 + \zeta^2,$$

$$\zeta^2 < \xi^2 + \tau^2.$$

Considérons l'équation

$$\zeta^2 = \xi^2 + \tau^2$$

ou, en coordonnées trilineaires,

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = \frac{\tau^2}{a^2};$$

elle représente une conique qui coupe CB en A' et y est tangente à la droite AA', qui coupe CA en B' et y est tangente à la droite BB', et il est facile de voir qu'une même branche de courbe (dans le cas où la courbe est une hyperbole) passe en A' et en B' : cette conique sépare les points du plan pour lesquels on a

$$\xi^2 > \tau^2 + \zeta^2$$

de ceux pour lesquels on a

$$\xi^2 < \tau^2 + \zeta^2.$$

On verrait de même que $\tau^2 = \xi^2 + \zeta^2$ représente une conique qui coupe CB en A', BA en C' et est tangente en ces points aux droites AA', CC', . . ., de sorte qu'il y a un triangle curviligne ayant pour sommets A', B', C' et pour côtés trois arcs de coniques tangentes entre elles deux à deux en ces sommets. On voit que, pour tous les points

situés à l'intérieur de ce triangle curviligne, le triangle formé avec les droites ξ, η, ζ est acutangle.

La surface de ce triangle curviligne est égale à la surface du triangle rectiligne $A' B' C'$ diminuée des trois segments compris entre les côtés de $A' B' C'$ et les coniques dont les côtés sont des cordes : elle peut donc être facilement calculée.

Pour résoudre la même question en employant la seconde solution, on remarquerait que les trois cônes

$$\xi^2 = \eta^2 + \zeta^2, \quad \eta^2 = \zeta^2 + \xi^2, \quad \zeta^2 = \xi^2 + \eta^2$$

déterminent sur $A_2 B_2 C_2$ un triangle curviligne $A'_1 B'_1 C'_1$ dont les côtés, intersections des cônes avec le plan $A_2 B_2 C_2$, sont tangents entre eux deux à deux en A'_1, B'_1, C'_1, \dots

En résumé :

1° La probabilité de pouvoir former un triangle avec ξ, η, ζ est

$$\begin{aligned} & \frac{\text{aire du triangle rectiligne } A' B' C'}{\text{aire de } ABC} \\ &= \frac{\text{aire du triangle rectiligne } A'_1 B'_1 C'_1}{\text{aire de } A_2 B_2 C_2} \\ &= \frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)}; \end{aligned}$$

2° La probabilité d'avoir un triangle acutangle est

$$\begin{aligned} & \frac{\text{aire du triangle curviligne } A' B' C'}{\text{aire de } ABC} \\ &= \frac{\text{aire du triangle curviligne } A'_1 B'_1 C'_1}{\text{aire de } A_2 B_2 C_2}; \end{aligned}$$

3° La probabilité, si l'on a un triangle, qu'il soit acutangle est

$$\begin{aligned} & \frac{\text{aire du triangle curviligne } A' B' C'}{\text{aire du triangle rectiligne } A' B' C'} \\ &= \frac{\text{aire du triangle curviligne } A'_1 B'_1 C'_1}{\text{aire du triangle rectiligne } A'_1 B'_1 C'_1}. \end{aligned}$$

Lorsque ABC est équilatéral, on trouve pour ces trois probabilités les nombres

$$\frac{1}{4}, \quad \log 8 - 2 = 0,0794415\dots, \quad \frac{1}{4}(\log 8 - 2) = 0,297766\dots,$$

et il est facile de voir que, dans ce cas particulier, le problème revient au problème déjà traité (voir *Bulletin de la Société mathématique*, 1^{re} année, p. 39; 11^e année, p. 13) :

On brise une barre en trois morceaux, quelle est la probabilité que l'on puisse, avec ces trois morceaux, former : 1^o un triangle, 2^o un triangle acutangle.