LAGUERRE

Sur l'approximation des racines des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 113-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__113_0>

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. LAGUERRE.

1. Étant donnée une équation algébrique à coefficients réels

$$f(x) = 0,$$

désignons par λ un nombre réel arbitraire, et posons

$$f(x) = (x - \lambda)\, F(x) + f(\lambda).$$

$F(x)$ est un polynôme entier, et l'on voit que l'équation $f(x) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad x = \lambda - \frac{f(\lambda)}{F(x)}.$$

Supposons que nous fassions varier x dans l'intervalle compris entre deux nombres α et β, le polynôme $F(x)$ prendra toutes les valeurs possibles comprises entre deux nombres M et N, en sorte que le second membre de l'égalité (1) variera dans un intervalle déterminé AB; cet intervalle renfermant l'infini, si M et N sont de signes contraires.

Si les intervalles $\alpha\beta$ et MN n'ont aucune partie commune, il est clair que l'équation (1) n'a aucune racine comprise entre les nombres α et β; si l'intervalle $\alpha\beta$ est entièrement compris dans l'intervalle MN, nous ne pourrons tirer aucune conclusion; mais, s'ils ont seulement une partie commune, les racines de l'équation qui sont comprises entre α et β seront nécessairement comprises dans cette partie commune et, par conséquent, resserrées dans des limites plus étroites.

Cette remarque très simple peut souvent être utile pour la séparation et pour l'approximation des racines; en voici une application.

2. Soit

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

où nous supposons a_0 positif; on a, comme on le sait,

$$\mathrm{F}(x) = f_0 x^{n-1} + f_1 x^{n-2} + \ldots + f_{n-2} x + f_{n-1},$$

où

$$f_0 = a_0, \quad f_1 = f_0 \lambda + a_1,$$
$$f_2 = f_1 \lambda + a_2, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = f_{n-2} \lambda + a_{n-1}.$$

Choisissons le nombre positif λ, de telle sorte que tous les nombres $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ soient également positifs; on voit que $\mathrm{F}(x)$ sera non seulement positif, mais encore croissant pour toute valeur positive de x.

Cela posé, je distinguerai deux cas suivant que $f(\lambda)$ est négative ou positive.

3. *Premier cas* : $f(\lambda) < 0$. — L'équation a nécessairement une racine supérieure à λ; je dis qu'elle a une seule racine positive. Faisons croître en effet x depuis zéro jusqu'à $+\infty$: le premier membre de l'égalité (1) va constamment en croissant, le second membre va constamment en décroissant, puisque $f(\lambda)$ est < 0, et que la valeur positive de $\mathrm{F}(x)$ va constamment en croissant; les deux membres ne peuvent donc être égaux que pour une seule valeur de x.

Soit α un nombre positif quelconque, tel que l'on ait $f(\alpha) < 0$; si l'on fait varier x depuis α jusqu'à $+\infty$, on voit que le second membre de l'égalité (1) varie de λ à $\lambda - \frac{f(\lambda)}{\mathrm{F}(\alpha)}$; il en résulte que la racine positive de l'équation donnée est inférieure à

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)};$$

cette racine est donc comprise entre α et $\alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)}$.

En particulier, si l'on fait $\alpha = \lambda$, on voit que le nombre $\lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$ est une limite supérieure des racines de l'équation.

4. Soit maintenant α un nombre positif, tel que l'on ait $f(\alpha) > 0$; si l'on fait varier x depuis α jusqu'à $+\infty$, on voit que le second membre de l'égalité (1) varie de λ à $\lambda - \lambda\frac{f(\lambda)}{F(\alpha)}$, et il en résulte, comme précédemment, que la racine est inférieure à

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)},$$

valeur plus approchée que la précédente, puisque $f(\alpha)$ est positif.

5. *Deuxième cas* : $f(\lambda) > 0$ (¹). — Soit α un nombre positif, tel que l'on ait $f(\alpha) < 0$, auquel cas il y a certainement une racine qui est plus grande que α.

Si l'on fait varier x depuis α jusqu'à $+\infty$, on voit que le second membre de l'égalité (1) varie de λ à

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)};$$

cette dernière quantité est plus grande que α, mais plus petite que λ; il en résulte que toutes les racines de

(¹) C'est le cas le plus général, et l'on peut toujours déterminer un nombre positif λ satisfaisant à cette inégalité; on devra le choisir le plus petit possible.

l'équation qui sont plus grandes que α sont comprises entre $\alpha - \dfrac{f(\alpha)}{F(\alpha)}$ et λ.

Ainsi la formule

$$(2) \qquad \beta = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)} = \lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \frac{\lambda f(\alpha) - \alpha f(\lambda)}{f(\alpha) - f(\lambda)}$$

donne une valeur de la racine immédiatement supérieure à α, valeur plus approchée que α et comme celle-ci inférieure à la racine.

En prenant pour point de départ β, on obtiendrait ainsi une suite de valeurs croissantes et approchant indéfiniment de la racine cherchée.

6. Soit α un nombre positif, tel que l'on ait $f(\alpha) > 0$. Si l'on fait varier x depuis zéro jusqu'à α, le second membre de l'égalité (1) varie de $\lambda - \dfrac{f(\lambda)}{F(0)}$ à

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{F(\alpha)};$$

cette dernière quantité est plus petite que α, mais plus grande que $\lambda - \dfrac{f(\lambda)}{F(0)}$.

Donc toutes les racines positives de l'équation qui sont inférieures à α sont comprises (s'il en existe) entre $\lambda - \dfrac{f(\lambda)}{F(0)}$ et $\lambda - \dfrac{f(\lambda)}{F(\alpha)}$.

Ainsi la formule (2) donne une valeur de la racine immédiatement inférieure à α, valeur plus approchée que α et, comme celle-ci, supérieure à la racine.

7. D'où la proposition suivante :

Étant pris le nombre positif arbitraire α_0, formons la suite des nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, d'après la loi de récurrence suivante :

$$\alpha_{i+1} = \lambda - \frac{f(\lambda)}{F(\alpha_i)};$$

si $f(\alpha_0)$ est < 0, la suite des nombres α_0, α_1, α_2, ... converge vers la valeur de la racine qui est immédiatement supérieure à α_0.

Si $f(\alpha_0)$ est > 0 et si l'équation a une ou plusieurs racines positives inférieures à α_0, la même suite converge vers la valeur de la racine immédiatement inférieure à α_0.

Si, dans le même cas, l'équation n'a pas de racine positive inférieure à α_0, un des termes de la suite est négatif.

λ désigne ici un nombre positif quelconque rendant positives toutes les fonctions

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_{n-1},\ f(\lambda).$$

8. La proposition contenue dans le n° 6 s'applique évidemment au cas où $\alpha = \lambda$; on voit ainsi que

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$$

est une limite supérieure des racines de l'équation.

En comparant ce résultat avec celui que j'ai obtenu plus haut (n° 3), on peut énoncer la proposition suivante :

Si λ est un nombre positif qui rend positives toutes les fonctions

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{n-1},$$

le nombre

$$\lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$$

est une limite supérieure des racines de l'équation.

La méthode qui résulte de ce théorème est d'une application plus facile que celle de Newton et donne souvent une limite plus rapprochée; je ferai remarquer toutefois que si le nombre $\lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$ était négatif, on devrait le remplacer par zéro.

La méthode de Newton est donc toujours plus avantageuse toutes les fois qu'elle conduit à une limite négative.