N. GOFFART

Note de trigonométrie élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 104-109

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__104_1>

NOTE DE TRIGONOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR M. N. GOFFART.

Dans les *Proceedings* de la Société philosophique de Cambridge, M. Glaisher énonce et vérifie quelques formules de Trigonométrie élémentaire auxquelles il est parvenu, dit-il, par l'intermédiaire des fonctions elliptiques.

Il est aisé d'en donner des démonstrations fort simples. Posons, avec M. Glaisher,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a' &= \tfrac{1}{2}(-a+b+c+d),\\ b' &= \tfrac{1}{2}(+a-b+c+d),\\ c' &= \tfrac{1}{2}(+a+b-c+d),\\ d' &= \tfrac{1}{2}(+a+b+c-d),\end{aligned}\right.$$

et

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a'' &= \tfrac{1}{2}(a+b+c+d) = +\tfrac{1}{2}(a'+b'+c'+d'),\\ b'' &= \tfrac{1}{2}(a+b-c-d) = -\tfrac{1}{2}(a'+b'-c'-d'),\\ c'' &= \tfrac{1}{2}(a-b+c-d) = -\tfrac{1}{2}(a'-b'+c'-d'),\\ d'' &= \tfrac{1}{2}(a-b-c+d) = -\tfrac{1}{2}(a'-b'-c'+d').\end{aligned}\right.$$

I. Considérons en premier lieu les sommes

$$[\cos(a-b)+\cos(c-d)] \pm [\cos(a+b)+\cos(c+d)],$$
$$[\cos(a-b)-\cos(c-d)] \pm [\cos(a+b)-\cos(c+d)].$$

1° On peut écrire

$$v = \cos(a-b)+\cos(c-d)+\cos(a+b)+\cos(c+d)$$

sous l'une des deux formes

$$\begin{aligned} v &= [\cos(a-b)+\cos(a+b)]+[\cos(c-d)+\cos(c+d)]\\ &= 2(\cos a\cos b+\cos c\cos d),\\ v &= [\cos(a-b)+\cos(c+d)]+[\cos(c-d)+\cos(a+b)]\\ &= 2(\cos a'\cos b'+\cos c'\cos d');\end{aligned}$$

d'où

$$(\alpha)\qquad \cos a\cos b+\cos c\cos d = \cos a'\cos b'+\cos c'\cos d'.$$

2° La formule

$$u = \cos(a-b)+\cos(c-d)-\cos(a+b)-\cos(c+d)$$

peut s'écrire aussi des deux manières

$$\begin{aligned} u &= [\cos(a-b) - \cos(a+b)] + [\cos(c-d) - \cos(c+d)] \\ &= 2[\sin a \sin b + \sin c \sin d], \\ u &= [\cos(a-b) - \cos(c-d)] + [\cos(c-d) - \cos(a+b)] \\ &= 2[\sin a' \sin b' + \sin c' \sin d'], \end{aligned}$$

d'où

$$(\beta) \qquad \sin a \sin b + \sin c \sin d = \sin a' \sin b' + \sin c' \sin d'.$$

Il y a évidemment trois formules analogues à (α) et à (β), et, en les ajoutant, on peut les écrire symboliquement

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma(\sin a \sin b) &= \Sigma(\sin a' \sin b'), \\ \Sigma(\cos a \cos b) &= \Sigma(\cos a' \cos b'). \end{aligned} \right.$$

3° La formule

$$v' = \cos(a-b) - \cos(c-d) + \cos(a+b) - \cos(c+d)$$

s'écrit des deux manières

$$\begin{aligned} v' &= [\cos(a-b) + \cos(a+b)] - [\cos(c-d) + \cos(c+d)] \\ &= 2(\cos a \cos b - \cos c \cos d); \\ v' &= [\cos(a-b) - \cos(c+d)] - [\cos(c-d) - \cos(a-b)] \\ &= 2(-\sin a' \sin b' + \sin c' \sin d'); \end{aligned}$$

d'où

$$(\alpha') \quad \cos a \cos b - \cos c \cos d = -\sin a' \sin b' + \sin c' \sin d'.$$

4° La formule

$$u' = \cos(a-b) - \cos(c-d) - \cos(a+b) + \cos(c+d)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} u' &= [\cos(a-b) - \cos(a-b)] - [\cos(c-d) - \cos(c+d)] \\ &= 2(\sin a \sin b - \sin c \sin d), \\ u' &= [\cos(a-b) + \cos(c+d)] - [\cos(c-d) + \cos(a+b)] \\ &= 2(\cos a' \cos b' - \cos c' \cos d'); \end{aligned}$$

d'où

$$(\beta')\quad \sin a \sin b - \sin c \sin d = \cos a' \cos b' - \cos c' \cos d'.$$

II. Considérons en second lieu les sommes

$$W = \cos(a-b)\cos(c-d) + \cos(a+b)\cos(c+d),$$
$$W' = \cos(a-b)\cos(c+d) + \cos(a+b)\cos(c-d).$$

1° On peut écrire

$$W = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & -\cos(a+b) \\ \cos(c+d) & \cos(c-d) \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant peut s'écrire de deux manières différentes en remplaçant, d'une part, les colonnes par la somme et la différence des colonnes, et, d'autre part, les lignes par la somme et la différence des lignes, ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}W = \begin{vmatrix} \sin a \sin b & -\cos a \cos b \\ \cos c \cos d & \sin a \sin b \end{vmatrix}$$
$$= \cos a \cos b \cos c \cos d + \sin a \sin b \sin c \sin d,$$

$$\tfrac{1}{2}W = \begin{vmatrix} \cos a' \cos b' & \sin c' \sin d' \\ -\sin a' \sin b' & \cos c' \cos d' \end{vmatrix}$$
$$= \cos a' \cos b' \cos c' \cos d' + \sin a' \sin b' \sin c' \sin d';$$

d'où

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{aligned} &\cos a \cos b \cos c \cos d + \sin a \sin b \sin c \sin d \\ &\quad = \cos a' \cos b' \cos c' \cos d' + \sin a' \sin b' \sin c' \cos d'. \end{aligned}\right.$$

2° La deuxième formule s'écrit de même

$$W' = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & -\cos(a+b) \\ \cos(c-d) & \cos(c+d) \end{vmatrix}$$

et donne

$$\tfrac{1}{2}W' = \begin{vmatrix} \sin a \sin b & -\cos a \cos b \\ \cos c \cos d & -\sin c \sin d \end{vmatrix}$$
$$= \cos a \cos b \cos c \cos d - \sin a \sin b \sin c \sin d,$$

$$\tfrac{1}{2}W' = \begin{vmatrix} \cos c'' \cos d'' & \sin a'' \sin b'' \\ \sin c'' \sin d'' & \cos a'' \cos b'' \end{vmatrix}$$
$$= \cos a'' \cos b'' \cos c'' \cos d'' - \sin a'' \sin b'' \sin c'' \sin d'';$$

d'où

$$(A')\left\{\begin{aligned}&\cos a\cos b\cos c\cos d-\sin a\sin b\sin c\sin d\\&\quad=\cos a''\cos b''\cos c''\cos d''-\sin a''\sin b''\sin c''\sin d''.\end{aligned}\right.$$

Si l'on introduit au moyen des relations (2) dans (A') les a', b', c', d' au lieu des a, b, c, d, en remarquant qu'il en résulte un changement de signe pour $\sin b''$, $\sin c''$, $\sin d''$, il viendra

$$(A'')\left\{\begin{aligned}&\cos a'\cos b'\cos c'\cos d'-\sin a'\sin b'\sin c'\sin d'\\&\quad=\cos a''\cos b''\cos c''\cos d''+\sin a''\sin b''\sin c''\sin d''.\end{aligned}\right.$$

Nous pouvons écrire symboliquement ces trois formules

$$(A)\qquad \Pi(\cos a)+\Pi(\sin a)=\Pi(\cos a')+\Pi(\sin a'),$$
$$(A')\qquad \Pi(\cos a)-\Pi(\sin a)=\Pi(\cos a'')-\Pi(\sin a''),$$
$$(A'')\qquad \Pi(\cos a')-\Pi(\sin a')=\Pi(\cos a'')+\Pi(\sin a'').$$

III. Formons maintenant les sommes

$$(A)-(A')-(A'')\quad \text{et}\quad (A)+(A')-(A''),$$

il viendra, après réduction et transposition,

$$(B)\qquad \Pi(\sin a)=-\Pi(\sin a')-\Pi(\sin a''),$$
$$(C)\qquad \Pi(\cos a)=+\Pi(\cos a')-\Pi(\sin a''),$$

qui se développent ainsi

$$(B)\left\{\begin{aligned}&\sin a\sin b\sin c\sin d\\&\quad=\sin a'\sin b'\sin c'\sin d'+\sin a''\sin b''\sin c''\sin d'',\end{aligned}\right.$$

$$(C)\left\{\begin{aligned}&\cos a\cos b\cos c\cos d\\&\quad=\cos a'\cos b'\cos c'\cos d'-\sin a''\sin b''\sin c''\sin d''.\end{aligned}\right.$$

IV. Reprenons les formules (α) et (β); élevons-les au carré et retranchons-les, en observant que

$$\cos^2 a\cos^2 b=1-\sin^2 a-\sin^2 b+\sin^2 a\sin^2 b.$$

Il viendra, en réduisant à l'aide de (B) et (C),

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{array}{l} \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2 d \\ \quad = \sin^2 a' + \sin^2 b' + \sin^2 c' + \sin^2 d' - 4 \sin a'' \sin b'' \sin c'' \sin d'' \end{array}\right.$$

ou

$$(\mathrm{D})\qquad \Sigma(\sin^2 a) = \Sigma(\sin^2 a') - 4\Pi(\sin a'').$$

De même, ajoutant (α) et (β'), préalablement élevées au carré, il vient

$$\begin{aligned} &2[\Pi(\cos\alpha) - \Pi(\sin\alpha)] \\ &\quad = 2(\cos^2\alpha' \cos^2\beta' + \cos^2 c' \cos^2 d') \\ &\qquad - (\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 c \cos^2 d + \sin^2 a \sin^2 b + \sin^2 c \sin^2 d). \end{aligned}$$

Faisant de même pour (α') et (β), on a

$$\begin{aligned} &2[\Pi(\cos\alpha) - \Pi(\sin\alpha)] \\ &\quad = - 2(\sin^2\alpha' \sin^2\beta' + \sin^2 c' \sin^2 d') \\ &\qquad + (\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 c \cos^2 d + \sin^2 a \sin^2 b + \sin^2 c \sin^2 d); \end{aligned}$$

puis, additionnant, il vient, en tenant compte de $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

$$(\mathrm{E})\quad \Pi(\cos\alpha) - \Pi(\sin\alpha) = 1 - \tfrac{1}{2}(\sin^2 a' + \sin^2 b' + \sin^2 c' + \sin^2 d')$$

ou

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos a \cos b \cos c \cos d - \sin a \sin b \sin c \sin d \\ \quad = 1 - \tfrac{1}{2}(\sin^2 a' + \sin^2 b' + \sin^2 c' + \sin^2 d'. \end{array}\right.$$