NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST CESÁRO

Propriétés d’une courbe de poursuite

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 85-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__85_0>

PROPRIÉTÉS D'UNE COURBE DE POURSUITE;

PAR M. ERNEST CÉSARO.

I. Deux mobiles M, μ partent en même temps d'un point O. M parcourt une trajectoire quelconque, μ se meut de manière à occuper, à chaque instant, le centre de gravité du chemin parcouru par M. Soient x, y et α, β les coordonnées respectives de M, μ. Soit r la distance Mμ et s, σ les chemins respectivement parcourus par M, μ.

1° On a

$$s\alpha = \int x\,ds,$$
$$s\beta = \int y\,ds,$$

et, en différentiant,

$$s\,d\alpha = (x - \alpha)\,ds,$$
$$s\,d\beta = (y - \beta)\,ds.$$

Ces égalités, divisées membre à membre, donnent

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{y - \beta}{x - \alpha}.$$

Donc *le second mobile est constamment dirigé vers le premier*. Les mêmes égalités, élevées au carré, ajoutées membre à membre, donnent

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{r}{s}.$$

Donc *le rapport des vitesses des deux mobiles est égal au rapport de leur distance au chemin parcouru par le mobile poursuivi*.

2° Différentiant l'égalité

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

on trouve

$$\frac{dr}{ds}=\left(\frac{x-\alpha}{r}\frac{dx}{ds}+\frac{y-\beta}{r}\frac{dy}{ds}\right)-\left(\frac{x-\alpha}{r}\frac{d\alpha}{ds}+\frac{y-\beta}{r}\frac{d\beta}{ds}\right).$$

Or, si l'on désigne par θ l'angle des tangentes aux deux trajectoires, en deux points correspondants, la première parenthèse est évidemment égale à $\cos\theta$, et la seconde à $\frac{d\sigma}{ds}\cdot$ Donc

$$\cos\theta=\frac{d(\sigma+r)}{ds},$$

ou bien

$$\cos\theta=2k+s\frac{dk}{ds},$$

si l'on désigne par k le rapport des vitesses $\frac{d\sigma}{ds}$ ou $\frac{r}{s}\cdot$

II. Y a-t-il des trajectoires pour lesquelles k reste constant? On doit avoir $\cos\theta=2k$, c'est-à-dire que θ doit être constant. Généralement, cet angle est nul en O : donc il doit rester constamment nul, et l'on doit avoir $k=\frac{1}{2}$. *Les trajectoires se confondent en une ligne droite.* Mais θ peut ne pas être nul en O, et cela arrive lorsque la tangente en O n'est pas déterminée, comme dans une spirale logarithmique de pôle O. Alors les trajectoires jouissent des propriétés suivantes :

1° $\cos\theta=2k$. *θ est constant.*

2° $r=\sigma=ks$. *La distance des deux mobiles est égale au chemin parcouru par le mobile poursuivant, et proportionnelle au chemin parcouru par le mobile poursuivi.*

III. Examinons le cas d'une spirale logarithmique, dont l'équation est $u=ae^{m\omega}$.

1° Les arcs étant comptés à partir du pôle, les formules ordinaires donnent, pour les coordonnées du centre de gravité, les valeurs suivantes

$$\alpha = \frac{mu}{1+4m^2}(\sin\omega + 2m\cos\omega),$$

$$\beta = \frac{mu}{1+4m^2}(2m\sin\omega - \cos\omega).$$

Puis

$$x-\alpha = \frac{u}{1+4m^2}[(1+2m^2)\cos\omega - m\sin\omega],$$

$$y-\beta = \frac{u}{1+4m^2}[m\cos\omega + (1+2m^2)\sin\omega],$$

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+4m^2}}u.$$

D'autre part, on sait que

$$s = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}u.$$

Par suite,

$$k = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{r}{s} = \frac{m}{\sqrt{1+4m^2}}.$$

Donc *le rapport des vitesses est constant.*

2° On a

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{mu}{\sqrt{1+4m^2}} = ku.$$

Donc *le rapport des rayons vecteurs est constant.*

3° On a

$$\cos\theta = 2k = \frac{2m}{\sqrt{1+4m^2}},$$

d'où

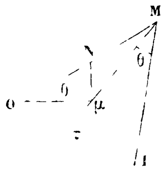
$$\mathrm{tang}\,\theta = \frac{1}{2m} = \tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,V,$$

si l'on désigne par V l'angle constant que fait la tangente en M avec OM. Il est donc facile de construire θ, connaissant V. D'autre part,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2m\sin\omega - \cos\omega}{\sin\omega + 2m\cos\omega}\,\mathrm{tang}(\omega-\theta).$$

Donc *l'angle des rayons vecteurs* OM, Oμ *est constant et égal à* θ. Remarquons aussi que *le triangle* OMμ *reste toujours semblable à lui-même.*

4° De ce qui précède, il résulte une construction fort simple du centre de gravité d'un arc de spirale logarithmique, compté à partir du pôle. Soit MT la tangente

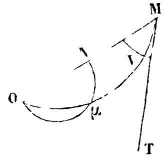


en M. On mène Oμ, Mμ faisant respectivement avec OM, MT le même angle θ. Le point μ est le centre de gravité cherché. Si l'on élève μN perpendiculaire à Oμ, on a

$$\mathrm{ON} = \frac{\mathrm{O}\mu}{\cos\theta} = \frac{k.\mathrm{OM}}{\cos\theta} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{OM}.$$

Donc N est le milieu de OM. De là une autre construction. Enfin, une troisième construction consiste à décrire sur OM, ON les circonférences respectivement capables des angles $\pi - \mathrm{V}$, $\frac{\pi}{2}$. Ces circonférences se coupent en μ, au centre de gravité cherché.

5° L'angle O$\mu\tau$ est évidemment égal à $\theta + (\mathrm{V} - \theta) = \mathrm{V}$.



Donc *le lieu du point* μ *est une spirale égale à la première et de même pôle.*

6° On démontre aisément que le centre de courbure C, de la spirale (M) au point M, est le point diamétralement opposé à M, dans la circonférence $OM\mu$, et que le centre de courbure de la spirale (μ), au point μ, se trouve au milieu de $C\mu$.