LAGUERRE

Sur quelques propriétés des cycles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 65-74

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__65_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CYCLES;

PAR M. LAGUERRE.

1. Étant donnés deux cycles A et B, menons-leur une tangente commune; la distance comprise entre les points de contact de cette semi-droite est la distance tangentielle des deux cycles. Elle n'est évidemment déterminée qu'en valeur absolue; dans tout ce qui suit, je la désignerai simplement sous le nom de *distance des deux cycles.*

On sait que, si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, la distance de deux cycles est égale à la distance des deux cycles correspondants.

2. Étant donnés trois cycles A, B et C, on peut chercher de quelle façon sont distribués dans le plan les cycles équidistants de ces trois cycles. Si nous effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que, les cycles α, β et γ correspondant aux cycles donnés, α et β soient opposés, il suffira évidemment de résoudre le problème proposé relativement à la nouvelle figure.

Il est aisé de voir que les cycles équidistants de deux cycles opposés α et β se réduisent aux points du plan. Désignant, en effet, par R et — R les rayons des cycles opposés, par ρ le rayon d'un cycle équidistant de α et de β, par d la distance de son centre au centre commun de α et de β, on a

$$d^2 - (R - \rho)^2 = d^2 - (R - \rho)^2,$$

d'où

$$R\rho = 0;$$

et, comme R est supposé différent de zéro, il suit nécessairement

$$\rho = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Les cycles équidistants de α, β et γ devant se réduire à des points, on les obtiendra tous en considérant les divers points de l'axe radical D des cycles α et γ; et de là, si l'on revient à la première figure, on voit que les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B, C sont tangents à deux semi-droites fixes Δ et Δ' qui sont les transformées des deux semi-droites opposées définies par la droite D. Ces deux semi-droites passent d'ailleurs par les points p et q, intersections des cycles α et γ, lesquels points peuvent être considérés comme les cycles tangents à α, β et γ.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B *et* C *touchent deux semi-droites fixes* Δ *et* Δ', *qui sont les tangentes communes aux deux cycles qui sont tangents à* A, B *et* C.

J'appellerai ces semi-droites les *semi-droites radicales* des cycles A, B et C; leur point de rencontre est évidemment le centre radical des trois cycles.

3. Proposons-nous de trouver les cycles équidistants de quatre cycles donnés A, B, C et D. Dans ce but effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que, α, β, γ et δ correspondant respectivement à A, B, C et D, α et β soient des cycles opposés.

Les cycles équidistants de α et de β se réduisant aux points du plan, il est clair qu'il n'y a qu'un seul cycle qui soit équidistant des cycles α, β, γ et δ : c'est le centre radical des cycles α, γ et δ; et de là, en revenant à la figure primitive, on peut conclure que :

Il n'y a dans le plan qu'un seul cycle équidistant de quatre cycles donnés A, B, C *et* D.

Je le désignerai sous le nom de *cycle radical* des cycles A, B, C et D.

4. Le cycle radical de A, B, C et D étant équidistant de A, B et C touche les semi-droites radicales de ces trois cycles : d'où la proposition suivante :

Etant donnés quatre cycles, les semi-droites radicales de trois quelconques de ces cycles touchent leur cycle radical; en groupant de toutes les façons possibles trois à trois les quatre cycles donnés, on a donc quatre systèmes de deux semi-droites qui touchent le cycle radical.

Un cas particulièrement remarquable est le suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre semi-droites données; A_i désignant l'une quelconque d'entre elles, appelons K_i le cycle qui touche les trois autres. Nous déterminerons ainsi quatre cycles K_1, K_2, K_3 et K_4 ; soit K leur cycle radical.

Il résulte de ce qui précède que K est tangent aux trois semi-droites radicales de K_1, K_2 et K_3 ; or ces cycles touchent tous les trois la semi-droite A_4 et il est aisé de voir que, quand trois cycles sont tangents à une même semi-droite Δ, leurs deux semi-droites radicales se confondent entre elles ou, pour parler plus exactement, se composent de deux semi-droites se coupant en leur centre radical et différant infiniment peu de la semi-droite menée en ce point parallèlement à la semi-droite Δ.

On conclut de là que le cycle K passe par le centre radical de K_1, K_2 et K_3 et est tangent à la semi-droite menée par ce point parallèlement à A_4.

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère de toutes les façons possibles trois quelconques des cycles K_1, K_2, K_3 *et* K_4 *et leur centre radical, on obtient quatre points qui sont sur un même cycle* K *et les tangentes menées à ce cycle en ces points sont respectivement parallèles aux semi-droites* A_1, A_2, A_3 *et* A_4.

Ce cycle K *est le cycle radical de* K_1, K_2, K_3 *et* K_4.

5. Les quatre cycles K_i qui sont ainsi déterminés par les semi-droites A_1, A_2, A_3 et A_4 jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables. J'énoncerai ici la suivante :

Si, parallèlement à une semi-droite donnée Δ, *on mène des tangentes à* K_1, K_2, K_3 *et* K_4, *le rapport anharmonique de ces quatre semi-droites est constant quelle que soit la direction de* Δ.

Pour démontrer cette proposition, j'énoncerai d'abord le lemme suivant dont l'application est fréquente :

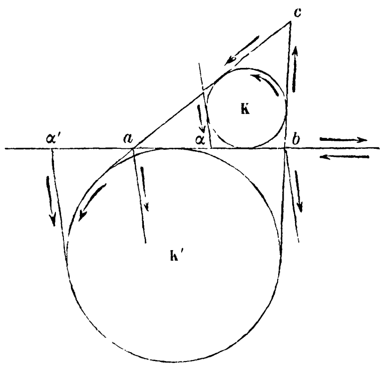
Lemme. — *Si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, à quatre semi-droites parallèles entre elles correspondent également quatre semi-droites parallèles.*

Le rapport anharmonique de celles-ci est égal au rapport anharmonique des quatre premières.

La démonstration de ce lemme résulte immédiatement de ce que deux semi-droites correspondantes se coupent au même point de l'axe de transformation.

Cela posé, je remarque que l'on peut toujours effectuer une transformation par semi-droites réciproques, de telle façon que deux semi-droites données aient pour transformées deux semi-droites opposées; le théorème que nous voulons démontrer étant projectif, il suffira donc de le démontrer dans ce cas.

Soient donc (*fig.* 1) *ca*, *bc*, *ab* et *ba* quatre semi-droites données (¹), K le cycle tangent à *bc*, *ca* et *ab*, K′



le cycle tangent *ba*, *ca* et *bc*. Il est clair que le cycle tangent à *ca*, *ab* et *ba* se réduit au point *a* et que le cycle tangent à *bc*, *ab* et *ba* se réduit au point *b*.

Cela posé, menons aux deux cycles K et K′ des tangentes parallèles à une semi-droite prise arbitrairement et soient respectivement α et α' les points où ces tangentes coupent la droite *ab*. Les points α et α' se correspondent de façon qu'à un point α correspond un seul point α' et réciproquement à un point α' correspond un seul point α. En effet, si l'on se donne par exemple le point α, on ne peut par ce point mener au cycle K qu'une seule tangente

(¹) Lorsque je désigne une semi-droite par deux lettres, l'ordre dans lequel sont placés ces lettres indique le sens de la semi-droite: ainsi PQ désigne une semi-droite décrite par un point mobile allant du point P au point Q. Il en résulte que PQ et QP sont deux semi-droites opposées.

distincte de ab; d'autre part, on ne peut mener au cycle K' qu'une seule tangente qui soit parallèle à celle-ci; le point α' où elle coupe ab est donc déterminé.

Il résulte de là que les points α et α' déterminent sur la droite ab deux divisions homographiques dont les points doubles sont évidemment les points a et b, et, par suite, en vertu d'une propriété bien connue, le rapport anharmonique des quatre points α, α', a et b est constant. Il en est évidemment de même du rapport anharmonique des tangentes passant par les points α et α' et des parallèles à ces tangentes menées par les points a et b. En d'autres termes, le rapport anharmonique des semi-droites, menées parallèlement à la semi-droite prise arbitrairement et tangentiellement aux cycles K, K', a et b, est constant; ce qui démontre la proposition énoncée.

6. Étant données deux semi-droites quelconques Δ et Δ', circonscrivons à K_1 un angle dont les côtés soient parallèles à Δ et Δ', et soit P_1 le sommet de cet angle.

Soient de même P_2, P_3 et P_4 les sommets des angles analogues circonscrits aux cycles K_2, K_3 et K_4. Le rapport anharmonique de quatre côtés de ces angles étant égal au rapport anharmonique des quatre autres, il suit de la proposition fondamentale de la théorie des coniques que *les quatre points* P_i *sont sur une conique ayant ses asymptotes parallèles à* Δ *et à* Δ'.

En particulier, supposons que Δ et Δ' soient deux droites isotropes de système différent; les points P_i sont les centres des cycles K_i. On peut donc énoncer la proposition suivante, que j'ai déjà démontrée directement dans une Note antérieure [1] :

---

(1) *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole* (*Nouvelles Annales*), même tome, p. 16.

Les centres des cycles K_i sont situés sur un même cercle.

7. J'énoncerai encore la proposition suivante :

Étant donnés deux cycles K et K′, si l'on considère quatre cycles quelconques H_1, H_2, H_3 et H_4 doublement tangents à K et à K′, et si, à ces quatre cycles, on circonscrit des angles ayant leurs côtés parallèles aux deux tangentes communes à K et à K′, les quatre sommets de ces angles sont sur une conique ayant leurs asymptotes parallèles à ces tangentes communes.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que le rapport anharmonique des semi-droites, menées tangentiellement aux cycles K_i parallèlement à l'une des tangentes, est égal au rapport anharmonique des semi-droites menées à ces cycles parallèlement à l'autre tangente; et, comme cette propriété est projective, il suffit de la démontrer dans un cas particulier. Or on peut toujours effectuer une transformation par directions réciproques, de telle sorte que les cycles K et K′ soient opposés entre eux; les cycles H_i se réduisent alors à quatre points du cercle K_0 déterminé par K et K′; les deux tangentes communes à K et à K′ sont des droites isotropes et l'on sait, par la propriété fondamentale du cercle, que les droites isotropes d'un système qui passent par ces quatre points ont leur rapport anharmonique égal au rapport anharmonique des droites isotropes de l'autre système qui passent par les mêmes points.

La proposition est donc entièrement démontrée.

Une conique dont la direction des asymptotes est donnée étant déterminée par trois de ses points, la proposition précédente peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Si l'on considère tous les cycles H qui touchent deux *cycles donnés* K *et* K′ *et si, à chacun des cycles* H, *on circonscrit un angle dont les côtés soient parallèles aux tangentes communes à* K *et à* K′, *le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à ces deux tangentes.*

Il est facile de voir que cette conique a effectivement ces deux tangentes pour asymptotes et qu'elle passe par les points d'intersection des cycles K et K′; d'où encore la proposition suivante :

Etant donnée une conique quelconque, attribuons un sens quelconque aux asymptotes de cette conique de façon à les transformer en deux semi-droites Δ *et* Δ′. *Cela posé, considérons deux points quelconques* M *et* N *de la conique; par le point* M, *on peut mener deux cycles tangents à* Δ *et à* Δ′; *par* N *on peut mener deux parallèles à* Δ *et* Δ′ : *ces deux cycles et ces deux parallèles sont tangents à un même cycle* P.

J'ajouterai que la corde qui joint les points de contact de P avec Δ et Δ′ est l'axe radical des cycles qui, passant par M, touchent ces deux semi-droites.

8. Il est aisé de voir que le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi qu'il suit :

Par deux points donnés γ *et* δ, *on peut mener deux cercles* K *et* K′ *qui touchent un cercle donné* C; *par les points où la droite* $\gamma\delta$ *rencontre* C, *menons des tangentes à ce cercle, soit* ε *leur point de rencontre. Par les points* γ, δ *et* ε, *faisons passer une conique ayant ses asymptotes parallèles aux tangentes dont je viens de parler; les asymptotes de cette conique sont deux tangentes communes à* K *et à* K′.

On peut généraliser ce théorème en faisant une transformation homographique de telle sorte que les ombilics du plan deviennent deux points quelconques α et β; on obtient alors la proposition suivante :

Étant donnés deux points quelconques α *et* β *sur une conique* C, *par deux points* γ *et* δ *du plan et les points* α *et* β *on peut mener deux coniques* K *et* K' *qui touchent* C; *par les points où la droite* $\gamma\delta$ *coupe* C, *menons des tangentes à cette conique et soit* ε *leur point de rencontre; soient de plus* λ *et* μ *les points où la corde* $\alpha\beta$ *rencontre ces tangentes. Cela posé, si l'on construit la conique déterminée par les cinq points* λ, μ, γ, δ *et* ε, *les tangentes menées à cette conique aux points* λ *et* μ *sont deux tangentes communes à* K *et à* K' (¹).

9. En particulier, supposons que les points γ et δ soient les ombilics du plan; la proposition précédente pourra s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés sur une conique C *deux points* α *et* β, *on peut par ces points mener deux cercles qui touchent* C; *ces deux cercles ont pour tangentes communes les tangentes menées au cercle qui passe par le centre de la courbe et les points où la droite* $\alpha\beta$ *coupe les asymptotes, aux points situés sur la droite* $\alpha\beta$.

Il est d'ailleurs évident que ces tangentes communes aux deux cercles se coupent en un de leurs centres de similitude.

10. Proposons-nous maintenant le problème suivant

(¹) La détermination des deux autres tangentes communes à K et à K' donnerait lieu à des recherches intéressantes.

Un théorème analogue au précédent a lieu à l'égard des coniques qui touchent une conique donnée, deux tangentes à cette conique et deux droites données.

Je reviendrai du reste sur ce sujet.

(proposé cette année comme sujet de la composition d'admission à l'École Polytechnique) :

Étant donnés deux cercles K *et* K′ *se coupant aux points* α *et* β, *construire les diverses coniques qui, passant par* α *et* β, *touchent ces cercles.*

Construisons deux tangentes communes à K et à K′ passant par un de leurs centres de similitude, puis le cercle H qui touche ces tangentes en leurs points de rencontre avec la droite $\alpha\beta$. En désignant par λ et μ ces deux points, il est clair, d'après la proposition précédente, que si l'on prend un point O quelconque sur le cercle H et si l'on joint $O\lambda$ et $O\mu$, la conique qui, passant par les points α et β, a pour asymptotes $O\lambda$ et $O\mu$, touche les deux cercles K et K′.

Le lieu des centres des coniques cherchées est donc le cercle H, et l'on voit que l'angle formé par les asymptotes de toutes ces coniques est constant.

En considérant les deux tangentes communes qui passent par le second centre de similitude, on obtiendrait un autre système de solutions, le lieu des centres de ces coniques étant un second cercle ayant, comme il est facile de le voir, même centre que le premier.