Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 521-527
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__521_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1462

(voir 3e série, t. II, p. 383);

PAR M. N. GOFFART.

Dans un triangle ABC *on a pris le point* C′ *sur* AB *et* B′ *sur* AC, *tels que l'angle* C′CB *soit égal à* $\frac{C}{m}$ *et que l'angle* B′BC *soit égal à* $\frac{B}{m}$; *démontrer que, si*

$$CC' = BB',$$

le triangle ABC *est isoscèle.* (EMILE LEMOINE.)

Dans les triangles BB′C et CC′B, on a

$$\frac{BB'}{\sin C} = \frac{BC}{\sin BB'C} \quad \text{et} \quad \frac{CC'}{\sin B} = \frac{BC}{\sin CC'B};$$

d'où, à cause de BB′ = CC′,

$$\frac{\sin C}{\sin BB'C} = \frac{\sin B}{\sin CC'B};$$

ou bien encore

$$(1) \qquad \frac{\sin C}{\sin\left(C + \frac{B}{m}\right)} = \frac{\sin B}{\sin\left(B + \frac{C}{m}\right)},$$

équation à laquelle on satisfait en posant B = C; ce qui démontre la proposition, attendu que la solution B = C est unique.

En effet, on peut remplacer l'équation (1) par une nouvelle équation qu'on obtient en ajoutant et retranchant terme à terme les rapports et transformant ensuite les sommes et les différences des sinus en produits; on a ainsi

$$(2)\qquad \frac{\tang\dfrac{B-C}{2}}{\tang\dfrac{m-1}{m}\dfrac{B-C}{2}} = \frac{\tang\dfrac{B+C}{2}}{\tang\dfrac{m+1}{m}\dfrac{B+C}{2}},$$

en posant $B > C$ et $m > 1$.

On a évidemment

$$\frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\tang\frac{B-C}{2} > \tang\frac{m-1}{m}\frac{B-C}{2};$$

c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (2) est > 1.

D'autre part, quand $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ varie entre 0 et $\frac{m}{m+1}\frac{\pi}{2}$, on a $\tang\frac{B+C}{2} < \tang\frac{m-1}{m}\frac{B+C}{2}$, et le second membre reste < 1. Si $\frac{B+C}{2}$ varie de $\frac{m}{m+1}\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$,

$$\tang\frac{m+1}{m}\frac{B+C}{2}$$

est négatif, $\tang\frac{B+C}{2}$ positif, et le second membre de l'équation (2) est négatif. Donc aucune valeur de $B - C$ autre que zéro ne satisfait à l'équation (2); par conséquent $B = C$. C. Q. F. D.

Note. — M. Moret-Blanc a donné de cette proposition une démonstration géométrique.

Question 1465

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 383);

PAR M. MORET-BLANC.

De deux points situés sur l'axe des x et équidistants de l'origine, on mène des tangentes à la conique re-

présentée par l'équation

$$ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x = 0;$$

prouver que les points d'intersection de ces tangentes sont sur la conique

$$by^2 + hxy - x = 0.$$

(Wolstenholme.)

L'équation quadratique des tangentes menées à la conique, du point $x = \alpha, y = 0$, est

$$(a\alpha^2 - 2\alpha)(ax^2 + by^2 + 2hxy - 2x) - [(a\alpha - 1)x + h\alpha y - \alpha]^2 = 0$$

ou, en développant, réduisant et ordonnant par rapport à α,

$$[(h^2 - ab)y^2 - 2hy + 1]\alpha^2 + 2(by^2 + hxy - x)\alpha + x^2 = 0,$$

et, pour le point $x = -\alpha, y = 0$, on aura

$$[(h^2 - ab)y^2 - 2hy + 1]\alpha^2 - 2(by^2 + hxy - x)\alpha + x^2 = 0.$$

Retranchant cette équation de la précédente pour éliminer α, il vient

$$by^2 + hxy - x = 0,$$

équation du lieu des points d'intersection des deux systèmes de tangentes

Note. — La même question a été résolue par M. Arnold Droz, professeur au gymnase de Porrentruy.

Question 1468

(voir 2ᵉ série, t. II, p. 384);

Par M. Moret-Blanc.

Soient, sur le cadran d'une montre à l'instant θ, OA *la direction de la petite aiguille*, OB *celle de la grande; déterminer* θ *de façon que, lorsque, après un certain temps, la petite aiguille sera venue sur la direc-*

tion OB, *la grande aiguille soit précisément dirigée suivant* OA. *Quelles sont toutes les heures comprises dans un cycle complet, de midi à minuit, qui répondent à la question ?* (D'Ocagne.)

Soient h le nombre d'heures et m le nombre de minutes dont se compose le temps θ; h est entier, mais m peut être fractionnaire.

Je compterai les distances sur la circonférence du cadran à partir de la position des aiguilles à midi, que je désigne par O', en prenant pour unité l'une des soixante divisions du cadran.

Cela posé,

$$O'B = m, \quad O'A = 5h + \frac{m}{12},$$

d'où

$$AB = \tfrac{11}{12} m - 5h.$$

Pendant que la petite aiguille va de A en B, la grande parcourt un nombre de divisions égal à

$$11m - 60h,$$

et, si elle est venue en A, ce nombre est aussi égal à

$$60 - \tfrac{11}{12} m + 5h;$$

donc

$$11m - 60h = 60 - \tfrac{11}{12} m + 5h,$$

$$\frac{11.13}{12} m = 60 + 65h,$$

$$m = \frac{720 + 780h}{143} = 5 + \frac{5}{143} + \left(5 + \frac{65}{143}\right) h.$$

En donnant à h successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, ..., 10, on aura les valeurs correspondantes de m, ce qui fera connaître les valeurs de θ, qui forment une progression arithmétique dont la raison est

$$1^{\mathrm{h}}\,5^{\mathrm{m}}\,\tfrac{65}{143}.$$

On trouve ainsi

$$
\begin{aligned}
& \quad\ \ {}^{\mathrm{h}}\ \ {}^{\mathrm{m}} \\
\theta_1 &= 0.\ 5.\tfrac{5}{143}, \\
\theta_2 &= 1.10.\tfrac{70}{143}, \\
\theta_3 &= 2.15.\tfrac{135}{143}, \\
\theta_4 &= 3.21.\tfrac{57}{143}, \\
\theta_5 &= 4.26.\tfrac{122}{143}, \\
\theta_6 &= 5.32.\tfrac{44}{143}, \\
\theta_7 &= 6.37.\tfrac{109}{143}, \\
\theta_8 &= 7.43.\tfrac{31}{143}, \\
\theta_9 &= 8.48.\tfrac{96}{143}, \\
\theta_{10} &= 9.54.\tfrac{18}{143}, \\
\theta_{11} &= 10.59.\tfrac{83}{143},
\end{aligned}
$$

après quoi on retrouverait la première position.

Note. — La même question a été résolue par un Anonyme, en Danemark.

Question 1472

(voir 2e série, t. II, p 432);

PAR M. ÉMILE LEMOINE.

Soient O *le centre du cercle circonscrit à un triangle* ABC *et* i *le point d'intersection des trois hauteurs du triangle; prouver :*

1° *Que la distance de* O *à l'un quelconque des côtés est la moitié de la distance de* i *au sommet opposé à ce côté; et de là*

2° *Que* Oi *est la résultante des trois forces égales* OA, OB, OC (¹). (SYLVESTER, F. R. S.)

Première partie. — Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés BC, AC, AB. .

(¹) La première partie de cette proposition est, depuis longtemps, connue; la seconde partie, qui résulte simplement de la première, n'avait pas été remarquée. (G.)

Les triangles OA_1B_1, iAB sont semblables comme ayant les côtés parallèles. Mais

$$AB = 2A_1B_1,$$

donc

$$iA = 2OA_1.$$

C. Q. F. D.

Deuxième partie. — Soit A′ le symétrique de O, par rapport à BC; OA′ est la résultante de OB, OC, puisque le quadrilatère OBCA′ est un losange.

Cela posé

$$OA' = 2OA_1 = iA;$$

donc le quadrilatère $A'OAi$ est un parallélogramme, et, par conséquent, Oi est la résultante de OA′ et de OA, c'est-à-dire de OB, OC, OA. C. Q. F. D.

On peut remarquer qu'on a le théorème suivant, beaucoup plus général :

Soient O *un point quelconque du plan d'un triangle* ABC *et* A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés* BC, AC, AB *du triangle. Si par les sommets* A, B, C *on mène, respectivement, des parallèles à* OA_1, OB_1, OC_1, *ces trois droites se rencontrent en un point i, et* Oi *est la résultante des droites* OA, OB, OC (¹).

Note. — La question 1472 a été résolue par MM. J. Rénoy; Goffart; Moret-Blanc; d'Ocagne, élève ingénieur des Ponts et Chaussées; Romero, à Madrid; A. Droz, à Chaux-de-Fonds; Victor de Strékalof, à Saint-Pétersbourg; L. B., à Angers.

(¹) Ce serait encore vrai si le point O n'appartenait pas au plan du triangle ABC, car, quelle que soit la position de ce point dans l'espace, les droites menées de A, B, C parallèlement à OA_1, OB_1, OC_1 se rencontrent en un point i; la droite Oi passe par le centre M des moyennes distances des trois points A, B, C; et, de plus, $Oi = OM \times 3$.

Il s'ensuit que Oi est résultante de OA, OB, OC d'après cette proposition générale, que la résultante d'un nombre quelconque, n, de forces OA, OB, OC, OD, ... passe par le centre des moyennes distances, M, des points A, B, C, D, ... et est égale à $OM \times n$. (G.)

Question 1474

(voir 3[e] série, t. II, p. 432);

PAR UN ANONYME.

ABC *est un triangle rectangle en* A. *D'un point quelconque* M *pris sur le côté* AB *on abaisse sur la hauteur* AH *la perpendiculaire* MP; *par le point* P *on élève à la droite* CP *la perpendiculaire* PQ *qui coupe* AB *prolongé au point* Q.

Démontrer que $AQ = BM$.

(D'OCAGNE.)

Les angles CPQ, CAQ étant droits, le quadrilatère CPAQ est inscriptible [1] : donc l'angle

$$\widehat{ACQ} = \widehat{APQ}.$$

Mais l'angle APQ, étant évidemment le complément de CPH, est égal à PCH. Donc $\widehat{ACQ} = \widehat{PCH}$. Par conséquent, les triangles rectangles ACQ, PCH sont semblables; et l'on a

$$\frac{AQ}{PH} = \frac{AC}{CH} = \frac{AB}{AH},$$

d'où

$$AQ = AB \times \frac{PH}{AH} = AB \times \frac{BM}{AB} = BM.$$

C. Q. F. D.

Note. — Même solution de M. Goffart.

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.