NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PICART

Théorie nouvelle du calcul des variations

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 49-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__49_0>

THÉORIE NOUVELLE DU CALCUL DES VARIATIONS;

PAR M. A. PICART.

1. Le calcul des variations, envisagé dans toute son étendue, a pour objet la solution du problème général suivant :

Étant donnée l'intégrale

$$V = \int\int\int\cdots\int F\left\{\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \dfrac{du}{dx_1}, \dfrac{du}{dx_2}, \ldots \\ \dfrac{du}{dx_n}, \dfrac{d^2u}{dx_1^2}, \ldots, \dfrac{d^pu}{dx_1^p}, \ldots; \\ v, \dfrac{dv}{dx_1}, \dfrac{dv}{dx_2}, \ldots, \dfrac{d^2v}{dx_1^2}, \ldots, \\ \dfrac{d^pv}{dx_1^p}, \ldots; w, \dfrac{dw}{dx_1}, \ldots \end{array}\right\} dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

dans laquelle u, v, w, ... sont de certaines fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on fait subir respectivement aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et aux fonctions u, v, w, ... des variations infiniment petites $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n, \delta u, \delta v, \delta w, \ldots$ que l'on suppose fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il s'agit de trouver la variation correspondante δV de cette intégrale.

Pour résoudre cette question, nous nous bornerons à considérer le cas particulier d'une intégrale triple dans laquelle ne figure qu'une seule fonction u, les résultats relatifs à ce cas s'étendant facilement à celui d'un nombre quelconque de variables indépendantes et de fonctions.

2. Soit donc à trouver la variation que subit l'intégrale triple

$$(1)\quad V=\int\int\int F\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nu}{dx^n}, \ldots\right) dx\,dy\,dz$$

lorsque les variables indépendantes x, y, z et la fonction u de ces variables subissent respectivement des variations infiniment petites δx, δy, δz, δu, fonctions de x, y, z.

La variation d'une somme étant égale à la somme des variations de ses parties, on a

$$\delta V=\int\int\int \delta \left| F\left(x, y, \ldots \frac{du}{dx}, \ldots\right) dx\,dy\,dz \right|$$

ou, en appliquant aux variations les règles de différentiation des fonctions

$$(2)\qquad \delta V=\int\int\int (\delta F . dx\,dy\,dz + F . \delta\, dx\,dy\,dz).$$

Il faut donc évaluer δF et $\delta\, dx\,dy\,dz$.

3. Or

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta F &= \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z \\ &+ \frac{dF}{du}\delta u + \frac{dF}{d\frac{du}{dx}}\delta\frac{du}{dx}, \ \ldots; \end{aligned} \right.$$

par conséquent, il suffit de calculer la variation des dérivées partielles successives de la fonction u.

Or, attribuer aux variables x, y, z et à la fonction u les accroissements infiniment petits δx, δy, δz, δu, cela revient à poser

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x + \delta x &= \mathrm{X},\\ y + \delta y &= \mathrm{Y},\\ z + \delta z &= \mathrm{Z},\\ u + \delta u &= \mathrm{U},\end{aligned}\right.$$

et à substituer aux variables x, y, z les nouvelles variables X, Y, Z, et à la fonction u de x, y, z la nouvelle fonction U de X, Y, Z. On est donc conduit à calculer les valeurs des dérivées partielles de cette nouvelle fonction U, par rapport à X, Y, Z, au moyen des dérivées partielles de u par rapport à x, y, z.

Pour évaluer ces dérivées, on regardera U comme une fonction de x, y, z exprimée par la dernière équation du groupe (4) et x, y, z comme des fonctions de X, Y, Z données par les trois premières.

On a ainsi

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{X}} &= \frac{d\mathrm{U}}{dx}\frac{dx}{d\mathrm{X}} + \frac{d\mathrm{U}}{dy}\frac{dy}{d\mathrm{X}} + \frac{d\mathrm{U}}{dz}\frac{dz}{d\mathrm{X}},\\ \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{Y}} &= \frac{d\mathrm{U}}{dx}\frac{dx}{d\mathrm{Y}} + \frac{d\mathrm{U}}{dy}\frac{dy}{d\mathrm{Y}} + \frac{d\mathrm{U}}{dz}\frac{dz}{d\mathrm{Y}},\\ \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{Z}} &= \frac{d\mathrm{U}}{dx}\frac{dx}{d\mathrm{Z}} + \frac{d\mathrm{U}}{dy}\frac{dy}{d\mathrm{Z}} + \frac{d\mathrm{U}}{dz}\cdot\frac{dz}{d\mathrm{Z}};\end{aligned}\right.$$

mais les équations (4) donnent

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{U}}{dx} &= \frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx},\\ \frac{d\mathrm{U}}{dy} &= \frac{du}{dy} + \frac{d\delta u}{dy},\\ \frac{d\mathrm{U}}{dz} &= \frac{du}{dz} + \frac{d\delta u}{dz},\end{aligned}\right.$$

et

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\frac{dx}{dX}+\frac{d\delta x}{dy}\frac{dy}{dX}+\frac{d\delta x}{dz}\frac{dz}{dX}=1,\\
&\frac{d\delta y}{dx}\frac{dx}{dX}+\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\frac{dy}{dX}+\frac{d\delta y}{dz}\frac{dz}{dX}=0,\\
&\frac{d\delta z}{dx}\frac{dx}{dX}+\frac{d\delta z}{dy}\frac{dy}{dX}+\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)\frac{dz}{dX}=0,
\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\frac{dx}{dY}+\frac{d\delta x}{dy}\frac{dy}{dY}+\frac{d\delta x}{dz}\frac{dz}{dY}=0,\\
&\frac{d\delta y}{dx}\frac{dx}{dY}+\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\frac{dy}{dY}+\frac{d\delta y}{dz}\frac{dz}{dY}=1,\\
&\frac{d\delta z}{dx}\frac{dx}{dY}+\frac{d\delta z}{dy}\frac{dy}{dY}+\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)\frac{dz}{dY}=0,
\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\frac{dx}{dZ}+\frac{d\delta x}{dy}\frac{dy}{dZ}+\frac{d\delta x}{dz}\frac{dz}{dZ}=0,\\
&\frac{d\delta y}{dx}\frac{dx}{dZ}+\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\frac{dy}{dZ}+\frac{d\delta y}{dz}\frac{dz}{dZ}=0,\\
&\frac{d\delta z}{dx}\frac{dx}{dZ}+\frac{d\delta z}{dy}\frac{dy}{dZ}+\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)\frac{dz}{dZ}=1.
\end{aligned}\right.$$

Comme δx, δy, δz et par suite leurs dérivées sont des infiniment petits, les équations (7) montrent que $\frac{du}{dX}$ est fini, $\frac{dy}{dX}$, $\frac{dz}{dX}$ infiniment petits, et, en conséquence, que l'on a, sans calcul,

$$(7')\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dx}{dX}=1-\frac{d\delta x}{dx},\\
&\frac{dy}{dX}=-\frac{d\delta y}{dx},\\
&\frac{dz}{dX}=-\frac{d\delta z}{dx},
\end{aligned}\right.$$

aux quantités du second ordre près.

De même, des équations (8) et (9) on déduit

$$(8')\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dY} = 1 - \dfrac{d\delta y}{dy}, \\ \dfrac{dz}{dY} = - \dfrac{d\delta z}{dy}, \\ \dfrac{dx}{dY} = - \dfrac{d\delta x}{dy}, \end{cases}$$

et

$$(9')\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dZ} = 1 - \dfrac{d\delta z}{dz}, \\ \dfrac{dx}{dZ} = - \dfrac{d\delta x}{dz}, \\ \dfrac{dy}{dZ} = - \dfrac{d\delta y}{dz}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs, ainsi que celles de $\dfrac{dU}{dx}, \dfrac{dU}{dy}, \dfrac{dU}{dz}$, données par les équations (6), dans les équations (5), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dX} &= \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx}\right)\left(1 - \frac{d\delta x}{dx}\right) \\ &\qquad - \left(\frac{du}{dy} + \frac{d\delta u}{dy}\right)\frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{du}{dz} + \frac{d\delta u}{dz}\right)\frac{d\delta z}{dx}, \\ \frac{dU}{dY} &= - \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx}\right)\frac{d\delta x}{dy} \\ &\qquad + \left(\frac{du}{dy} + \frac{d\delta u}{dy}\right)\left(1 - \frac{d\delta y}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dz} + \frac{d\delta u}{dz}\right)\frac{d\delta z}{dy}, \\ \frac{dU}{dZ} &= - \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\delta u}{dx}\right)\frac{d\delta x}{dz} \\ &\qquad - \left(\frac{du}{dy} + \frac{d\delta u}{dy}\right)\frac{d\delta y}{dz} + \left(\frac{du}{dz} + \frac{d\delta u}{dz}\right)\left(1 - \frac{d\delta z}{dz}\right), \end{aligned}$$

ou, abstraction faite des termes du second ordre,

$$\frac{dU}{dX}=\frac{du}{dx}+\frac{d\delta u}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dx}-\frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dx}-\frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dx},$$

$$\frac{dU}{dY}=\frac{du}{dy}+\frac{d\delta u}{dy}-\frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dy}-\frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dy},$$

$$\frac{dU}{dZ}=\frac{du}{dz}+\frac{d\delta u}{dz}-\frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dz}-\frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dz},$$

et, si l'on pose

$$\delta u-\frac{du}{dx}\delta x-\frac{du}{dy}\delta y-\frac{du}{dz}\delta z=\delta\omega,$$

ces formules deviennent

$$(10)\left\{\begin{aligned}
\frac{dU}{dX}&=\frac{du}{dx}+\frac{d\delta\omega}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\delta x+\frac{d^2u}{dx\,dy}\delta y+\frac{d^2u}{dx\,dz}\delta z.\\
\frac{dU}{dY}&=\frac{du}{dy}+\frac{d\delta\omega}{dy}+\frac{d^2u}{dy\,dx}\delta x+\frac{d^2u}{dy^2}\delta y+\frac{d^2u}{dy\,dz}\delta z,\\
\frac{dU}{dZ}&=\frac{du}{dz}+\frac{d\delta\omega}{dz}+\frac{d^2u}{dz\,dx}\delta x+\frac{d^2u}{dz\,dy}\delta y+\frac{d^2u}{dz^2}\delta z.
\end{aligned}\right.$$

De là on déduit les valeurs de

$$\frac{dU}{dX}-\frac{du}{dx},\quad \frac{dU}{dY}-\frac{du}{dy},\quad \frac{dU}{dZ}-\frac{du}{dz},$$

ou de

$$\delta\frac{du}{dx},\quad \delta\frac{du}{dy},\quad \delta\frac{du}{dz},$$

savoir

$$(11)\left\{\begin{aligned}
\delta\frac{du}{dx}&=\frac{d\delta\omega}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\delta x+\frac{d^2u}{dx\,dy}\delta y+\frac{d^2u}{dx\,dz}\delta z,\\
\delta\frac{du}{dy}&=\frac{d\delta\omega}{dy}+\frac{d^2u}{dy\,dx}\delta x+\frac{d^2u}{dy^2}\delta y+\frac{d^2u}{dy\,dz}\delta z.\\
\delta\frac{du}{dz}&=\frac{d\delta\omega}{dz}+\frac{d^2u}{dz\,dx}\delta x+\frac{d^2u}{dz\,dy}\delta y+\frac{d^2u}{dz^2}\delta z.
\end{aligned}\right.$$

En différentiant la première des équations (10) par rapport à X, Y, Z, la seconde par rapport à Y et Z, et la troisième par rapport à Z, et tenant compte des équations (7′), (8′), (9′), on obtient successivement

$$\frac{d^2U}{dX^2} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2\delta\omega}{dx^2} + \dfrac{d^3u}{dx^3}\delta x + \dfrac{d^3u}{dx^2dy}\delta y \\ \quad + \dfrac{d^3u}{dx^2dz}\delta z + \dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{d\delta x}{dx} \\ \quad + \dfrac{d^2u}{dxdy}\dfrac{d\delta y}{dx} + \dfrac{d^2u}{dxdz}\dfrac{d\delta z}{dx} \end{array} \right\} \left(1 - \frac{d\delta x}{dx}\right)$$

$$- \left(\frac{d^2u}{dxdy} + \text{termes du premier ordre}\right)\frac{d\delta y}{dx}$$

$$- \left(\frac{d^2u}{dxdz} + \text{termes du premier ordre}\right)\frac{d\delta z}{dx},$$

ou

$$\frac{d^2U}{dX^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2\delta\omega}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^3}\delta x + \frac{d^3u}{dx^2dy}\delta y + \frac{d^3u}{dx^2dz}\delta z,$$

et, de la même manière,

$$\frac{d^2U}{dXdY} = \frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2d\omega}{dxdy}$$
$$+ \frac{d^3u}{dx^2dy}\delta x + \frac{d^3u}{dxdy^2}\delta y + \frac{d^3u}{dxdydz}\delta z,$$

$$\frac{d^2U}{dXdZ} = \frac{d^2u}{dxdz} + \frac{d^2\delta\omega}{dxdz}$$
$$+ \frac{d^3u}{dx^2dz}\delta x + \frac{d^3u}{dxdydz}\delta y + \frac{d^3u}{dxdz^2}\delta z,$$

$$\frac{d^2U}{dY^2} = \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2\delta\omega}{dy^2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\delta x + \frac{d^3u}{dy^3}\delta y + \frac{d^3u}{dy^2dz}\delta z,$$

$$\frac{d^2U}{dYdZ} = \frac{d^2u}{dydz} + \frac{d^2\delta\omega}{dydz}$$
$$+ \frac{d^3u}{dxdydz}\delta x + \frac{d^3u}{dy^2dz}\delta y + \frac{d^3u}{dydz^2}\delta z,$$

$$\frac{d^2U}{dZ^2} = \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2\delta\omega}{dz^2} + \frac{d^3u}{dxdz^2}\delta x + \frac{d^3u}{dydz^2}\delta y + \frac{d^3u}{dz^3}\delta z;$$

par suite,

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta\frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d^2\delta\omega}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^3}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dx^2dy}\delta y + \frac{d^3u}{dx^2dz}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dxdy} &= \frac{d^2\delta\omega}{dxdy} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dxdy^2}\delta y + \frac{d^3u}{dxdydz}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dxdz} &= \frac{d^2\delta\omega}{dxdz} + \frac{d^3u}{dx^2dz}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dxdydz}\delta y + \frac{d^3u}{dxdz^2}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dy^2} &= \frac{d^2\delta\omega}{dy^2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dy^3}\delta y + \frac{d^3u}{dy^2dz}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dydz} &= \frac{d^2\delta\omega}{dydz} + \frac{d^3u}{dxdydz}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dy^2dz}\delta y + \frac{d^3u}{dydz^2}\delta z, \\
\delta\frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{d^2\delta\omega}{dz^2} + \frac{d^3u}{dxdz^2}\delta x \\
&\quad + \frac{d^3u}{dydz^2}\delta y + \frac{d^3u}{dz^3}\delta z.
\end{aligned}
\right.
$$

Telles sont les variations des dérivées premières et secondes de u. La loi de formation en est évidente; il reste à montrer qu'elle est générale.

Supposons, à cet effet, que l'on ait

$$
\delta\frac{d^{i+j}u}{dx^idy^j} = \frac{d^{i+j}\delta\omega}{dx^idy^j} + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j}\delta x + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^idy^{j+1}}\delta y + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^idy^jdz}\delta z;
$$

en différentiant l'équation

$$\frac{d^{i+j}\mathrm{U}}{d\mathrm{X}^i d\mathrm{Y}^j} = \frac{d^{i+j}u}{dx^i dy^j} + \frac{d^{i+j}\delta\omega}{dx^i dy^j} + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j}\delta x + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^{j+1}}\delta y + \frac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^j dz}\delta z$$

par rapport à X, on obtiendra

$$\frac{d^{i+j+1}\mathrm{U}}{d\mathrm{X}^{i+1}d\mathrm{Y}^j} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j} + \dfrac{d^{i+j+1}\delta\omega}{dx^{i+1}dy^j} + \dfrac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+2}dy^j}\delta x \\ \quad + \dfrac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^{j+1}}\delta y + \dfrac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^j dz}\delta z \\ \quad + \dfrac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j}\dfrac{d\delta x}{dx} + \dfrac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^{j+1}}\dfrac{d\delta y}{dx} \\ \quad + \dfrac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^j dz}\dfrac{d\delta z}{dx} \end{array}\right\}\left(1 - \frac{d\delta x}{dx}\right)$$

$$- \left(\frac{d^{i+j+1}u}{dx^i dy^{j+1}} + \text{termes du 1}^{\text{er}}\text{ ordre}\right)\frac{d\delta y}{dx}$$

$$- \left(\frac{d^{i+j+1}u}{dx^i y^j dz} + \text{termes du 1}^{\text{er}}\text{ ordre}\right)\frac{d\delta z}{dx},$$

ou

$$\frac{d^{i+j+1}\mathrm{U}}{d\mathrm{X}^{i+1}d\mathrm{Y}^j} = \frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j} + \frac{d^{i+j+1}\delta\omega}{dx^{i+1}dy^j} + \frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+2}dy^j}\delta x + \frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^{j+1}}\delta y + \frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^j dz}\delta z,$$

ou

$$\delta\frac{d^{i+j+1}u}{dx^{i+1}dy^j} = \frac{d^{i+j+1}\delta\omega}{dx^{i+1}dy^j} + \frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+2}dy^j}\delta x + \frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^{j+1}}\delta y + \frac{d^{i+j+2}u}{dx^{i+1}dy^j dz}\delta z,$$

c'est-à-dire la formule relative à $\frac{d^{i+j}u}{dx^i dy^j}$, dans laquelle l'indice i est remplacé par $i+1$, ce qui démontre la généralité de la loi de formation des variations des dérivées partielles successives de la fonction u.

Si l'on porte dans δF les valeurs de ces variations, on aura δF exprimé en fonction linéaire de δx, δy, δz, $\delta\omega$ et des dérivées partielles de $\delta\omega$.

4. Quant à la variation de $dx\,dy\,dz$, c'est-à-dire du produit des différentielles des variables indépendantes, on l'obtiendra en se rappelant que, lorsque l'on substitue dans une intégrale multiple aux variables x, y, z d'autres variables X, Y, Z liées aux premières par trois équations, il faut substituer au produit $dx\,dy\,dz$ le produit $d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$ multiplié par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{d\mathrm{X}} & \dfrac{dy}{d\mathrm{X}} & \dfrac{dz}{d\mathrm{X}} \\ \dfrac{dx}{d\mathrm{Y}} & \dfrac{dy}{d\mathrm{Y}} & \dfrac{dz}{d\mathrm{Y}} \\ \dfrac{dx}{d\mathrm{Z}} & \dfrac{dy}{d\mathrm{Z}} & \dfrac{dz}{d\mathrm{Z}} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} = \frac{dx\,dy\,dz}{\Delta}.$$

Ici, la valeur du déterminant est, aux quantités du second ordre près,

$$1 - \frac{d\delta x}{dx} - \frac{d\delta y}{dy} - \frac{d\delta z}{dz};$$

il en résulte pour $d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} - dx\,dy\,dz$, ou la variation de $dx\,dy\,dz$,

$$(13)\quad \delta(dx\,dy\,dz) = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right) dx\,dy\,dz.$$

La variation δV de l'intégrale se présentera donc sous la forme d'une intégrale triple portant sur une fonction linéaire homogène de δx, dy, dz, $\dfrac{d\delta x}{dx}$, $\dfrac{d\delta y}{dy}$, $\dfrac{\delta dz}{dz}$, de $\delta\omega$ et de ses dérivées partielles successives.

5. On peut la ramener à une intégrale portant sur une quantité qui ne renferme que $\delta\omega$ en facteur.

En effet, d'abord le terme qui contient $\frac{d^{i+j+k}\delta\omega}{dx^i dy^j dz^k}$ donne lieu à l'intégrale

$$\int\int\int \mathrm{A}\,\frac{d^{i+j+k}\delta\omega}{dx^i dy^j dz^k}\,dx\,dy\,dz,$$

qui peut s'écrire

$$\int\int dy\,dz \int \mathrm{A}\,\frac{d^{i+j+k}\delta\omega}{dx^i dy^j dz^k}\,dx,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\int\int dy\,dz\left(\mathrm{A}\,\frac{d^{i+j+k-1}\delta\omega}{dx^{i-1} dy^j dz^k}\right)$$
$$-\int\int\int \frac{d\mathrm{A}}{dx}\,\frac{d^{i+j+k-1}\delta\omega}{dx^{i-1} dy^j dz^k}\,dx\,dy\,dz.$$

Cette dernière intégrale, dans laquelle l'ordre de la dérivée de $\delta\omega$ est abaissé d'une unité par rapport à x, se transformera de même en une autre dans laquelle l'ordre sera abaissé de deux unités, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de dérivées de $\delta\omega$ par rapport à x. On fera de même pour les dérivées relatives à y et pour celles relatives à z, et l'on aura finalement une intégrale dans laquelle ne figurera plus que la variation $\delta\omega$.

Ensuite, en transformant de la même manière les intégrales

$$\int\int\int \mathrm{F}\,\frac{d\delta x}{dx}\,dx\,dy\,dz,\quad \int\int\int \mathrm{F}\,\frac{d\delta y}{dy}\,dx\,dy\,dz,$$
$$\int\int\int \mathrm{F}\,\frac{d\delta z}{dz}\,dx\,dy\,dz,$$

on obtient pour la première

$$\int\int dy\,dz(\mathrm{F}\,\delta x)$$
$$-\int\int\int\left[\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)+\left(\frac{d\mathrm{F}}{du}\right)\frac{du}{dx}+\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\frac{du}{dx}}\right)\frac{d^2u}{dx^2}+\ldots\right]\delta x\,dx\,dy\,dz.$$

Or, dans $\delta\mathrm{F}$, les termes qui renferment δx en facteur sont

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)+\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\frac{du}{dx}}\right)\frac{d^2u}{dx^2}+\ldots:$$

donc, après réduction, les termes qui renfermeront δx, δy, δz seront

$$-\frac{d\mathrm{F}}{du}\left(\frac{du}{dx}\delta x+\frac{du}{dy}\delta y+\frac{du}{dz}\delta z\right),$$

et ils se réduisent avec $\frac{d\mathrm{F}}{du}\delta u$ à

$$\frac{d\mathrm{F}}{du}\left(\delta u-\frac{du}{dx}\delta x-\frac{du}{dy}\delta y-\frac{du}{dz}\delta z\right)$$

ou

$$\frac{d\mathrm{F}}{du}\delta\omega.$$

Ainsi, toutes réductions faites, la variation $\delta\mathrm{V}$ se composera d'une suite G d'intégrales doubles relatives aux limites, c'est-à-dire à la surface du corps dans l'étendue duquel doit se faire l'intégration triple, et d'une intégrale triple de la forme

$$\int\int\int \mathrm{M}\,\delta\omega\,dx\,dy\,dz,$$

M étant une certaine fonction de x, y, z, u et des dérivées partielles de u.

S'il y avait sous l'intégrale triple proposée plus d'une fonction u, s'il y avait deux, trois fonctions u, v, w, en posant

$$\delta u - \frac{du}{dx}\delta x - \frac{du}{dy}\delta y - \frac{du}{dz}\delta z = \delta\omega,$$

$$\delta v - \frac{dv}{dx}\delta x - \frac{dv}{dy}\delta y - \frac{dv}{dz}\delta z = \delta\omega_1,$$

$$\delta w - \frac{dw}{dx}\delta x - \frac{dw}{dy}\delta y - \frac{dw}{dz}\delta z = \delta\omega_2,$$

on arriverait, après réductions, à l'intégrale triple

$$\int\int\int(\mathrm{M}\,\delta\omega + \mathrm{N}\,\delta\omega_1 + \mathrm{P}\,\delta\omega_2)\,dx\,dy\,dz.$$

6. Supposons maintenant qu'il s'agisse de déterminer les fonctions u, v, w, de manière que, quelles que soient les variations δx, δy, δz, δu, δv, δw, la variation $\delta\mathrm{V}$ soit nulle. Comme, dans les intégrales doubles, il n'entre que les valeurs *à la surface* des variations δx, δy, δz, $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_1$ et de leurs dérivées, tandis que dans l'intégrale triple les variations sont relatives à toute l'étendue du corps, il faut évidemment que l'intégrale triple et l'ensemble des intégrales doubles soient séparément nulles; et pour que l'intégrale triple soit nulle, quels que soient $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, il faut que l'on ait

$$\mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{P} = 0,$$

trois équations nécessaires et suffisantes, avec l'équation relative aux limites $\mathrm{G} = 0$, pour déterminer les trois fonctions u, v, w.

7. Exprimer que la variation de V est nulle, quels que soient $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, c'est exprimer que l'intégrale V est maximum ou minimum.

Si l'on proposait de trouver le maximum ou le minimum dont est susceptible V quand une, deux, trois autres intégrales $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3$ relatives aux mêmes fonctions

u, v, w et aux mêmes variables x, y, z doivent conserver en même temps chacune une valeur constante, il faudrait joindre à l'équation $\delta V = 0$ les équations analogues

$$\delta V_1 = 0, \quad \delta V_2 = 0, \quad \delta V_3 = 0$$

et l'on devrait avoir simultanément

$$(14)\quad \begin{cases} G + \int\int\int (M\,\delta\omega + N\,\delta\omega_1 + P\,\delta\omega_2)\,dx\,dy\,dz = 0, \\ G_1 + \int\int\int (M_1\,\delta\omega + N_1\,\delta\omega_1 + P_1\,\delta\omega_2)\,dx\,dy\,dz = 0, \\ G_2 + \int\int\int (M_2\,\delta\omega + N_2\,\delta\omega_1 + P_2\,\delta\omega_2)\,dx\,dy\,dz = 0, \\ G_3 + \int\int\int (M_3\,\delta\omega + N_3\,\delta\omega_1 + P_3\,\delta\omega_2)\,dx\,dy\,dz = 0. \end{cases}$$

Or on peut toujours poser

$$M_1\,\delta\omega + N_1\,\delta\omega_1 + P_1\,d\omega_2 = \frac{d\lambda_1}{dx},$$

$$M_2\,\delta\omega + N_2\,\delta\omega_1 + P_2\,d\omega_2 = \frac{d\lambda_2}{dx},$$

$$M_3\,\delta\omega + N_3\,\delta\omega_1 + P_3\,\delta\omega_2 = \frac{d\lambda_3}{dx},$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des fonctions de x, y, z; d'où, en désignant par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} M_1 & N_1 & P_1 \\ M_2 & N_2 & P_2 \\ M_3 & N_3 & P_3 \end{vmatrix},$$

$$(15)\quad \begin{cases} \Delta.\delta\omega = A_1\dfrac{d\lambda_1}{dx} + A_2\dfrac{d\lambda_2}{dx} + A_3\dfrac{d\lambda_3}{dx}, \\ \Delta.\delta\omega_1 = B_1\dfrac{d\lambda_1}{dx} + B_2\dfrac{d\lambda_2}{dx} + B_3\dfrac{d\lambda_3}{dx}, \\ \Delta.\delta\omega_2 = C_1\dfrac{d\lambda_1}{dx} + C_2\dfrac{d\lambda_2}{dx} + C_3\dfrac{d\lambda_3}{dx}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs de $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$ dans la première équation du groupe (14), on obtient

$$
\begin{aligned}
o = G + \int\!\!\int\!\!\int \Bigg(& \frac{MA_1 + NB_1 + PC_1}{\Delta} \frac{\delta\lambda_1}{dx} + \frac{MA_2 + NB_2 + PC_2}{\Delta} \\
& \times \frac{\delta\lambda_2}{dx} + \frac{MA_3 + NB_3 + PC_3}{\Delta} \frac{d\lambda_3}{dx} \Bigg) dx\, dy\, dz ;
\end{aligned}
$$

l'intégration par parties donne ensuite

$$
\begin{aligned}
& G \\
& \int\!\!\int \left[\frac{(MA_1 + NB_1 + PC_1)\lambda_1 + (MA_2 + NB_2 + PC_2)\lambda_2 + (MA_3 + NB_3 + PC_3)\lambda_3}{\Delta} \right] dy\, dz \\
& \int\!\!\int\!\!\int \left[\frac{d\,\frac{MA_1 + NB_1 + PC_1}{\Delta}}{dx} \lambda_1 \right. \\
& \qquad \left. + \frac{d\,\frac{MA_2 + NB_2 + PC_2}{\Delta}}{dx} \lambda_2 + \frac{d\,\frac{MA_3 + NB_3 + PC_3}{\Delta}}{dx} \lambda_3 \right] dx\, dy\, dz ;
\end{aligned}
$$

mais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont, dans l'intérieur du corps, des quantités arbitraires comme $\delta\omega$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$; donc on doit avoir

$$
(16) \qquad \left\{ \begin{aligned}
MA_1 + NB_1 + PC_1 &= a\Delta, \\
MA_2 + NB_2 + PC_2 &= b\Delta, \\
MA_3 + NB_3 + PC_3 &= c\Delta,
\end{aligned} \right.
$$

a, b, c étant indépendants de x. Mais on arriverait au même résultat si, au lieu d'égaler les quantités

$$
\begin{gathered}
M_1 \delta\omega + N_1 \delta\omega_1 + P_1 \delta\omega_2, \\
M_2 \delta\omega + N_2 \delta\omega_1 + P_2 \delta\omega_2, \\
M_3 \delta\omega + N_3 \delta\omega_1 + P_3 \delta\omega_2
\end{gathered}
$$

aux dérivées relatives à x de trois fonctions λ_1, λ_2, λ_3, on les égalait aux dérivées relatives à y ou à z. Donc a, b, c doivent être regardées comme des constantes.

Des trois équations qui précèdent, en se rappelant les propriétés fondamentales des déterminants, on déduit

$$(17)\qquad \begin{cases} M = aM_1 + bM_2 + cM_3, \\ N = aN_1 + bN_2 + cN_3, \\ P = aP_1 + bP_2 + cP_3. \end{cases}$$

Telles sont les équations qui serviront à déterminer les fonctions u, v, w. Il faudra, en outre, tenir compte de l'équation aux limites

$$G + \int\int \left\{ \begin{array}{l} \frac{MA_1 + NB_1 + PC_1}{\Delta}\lambda_1 + \frac{MA_2 + NB_2 + PC_2}{\Delta}\lambda_2 \\ + \frac{MA_3 + NB_3 + BC_3}{\Delta}\lambda_3 \end{array} \right\} dy\,dz = 0,$$

ou

$$G + a\int\int \lambda_1\,dy\,dz + b\int\int \lambda_2\,dy\,dz + c\int\int \lambda_3\,dy\,dz = 0;$$

mais on a

$$G_1 = -\int\int\int \frac{d\lambda_1}{dx}\,dx\,dy\,dz = -\int\int \lambda_1\,dy\,dz,$$

$$G_2 = -\int\int \lambda_2\,dy\,dz,$$

$$G_3 = -\int\int \lambda_3\,dy\,dz;$$

cette équation équivaut donc à

$$(18)\qquad G = aG_1 + bG_2 + cG_3.$$

D'où l'on voit que les équations qui servent à déterminer les fonctions u, v, w ne sont autres que celles auxquelles on serait conduit si l'on cherchait le maximum ou le minimum de la fonction

$$V - aV_1 - bV_2 - cV_3.$$

La recherche des maxima ou minima relatifs se trouve ainsi ramenée à celle des maxima ou minima absolus.