NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. RESAL

Sur la théorie des tautochrones

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 481-493

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__481_0>

SUR LA THÉORIE DES TAUTOCHRONES [1];

PAR M. H. RESAL.

1. *Théorie générale.* — On dit qu'une courbe fixe est *tautochrone* lorsqu'un point matériel m, soumis à l'action d'une force extérieure variable en grandeur et en direction suivant une loi donnée, qui est assujetti à décrire cette courbe, arrive dans le même temps en un point déterminé A_1, quel que soit le point de départ A_0 ou pour lequel la vitesse est nulle.

Pour plus de simplicité, nous supposerons la masse du mobile égale à l'unité.

Nous ne considérerons [2] que le cas où la force extérieure dérive d'un potentiel d'une seule variable χ, potentiel que nous représenterons par

$$-f(\chi).$$

Soient χ_0, χ_1 les valeurs de χ en A_0, A_1; v la vitesse du mobile arrivé en un point A correspondant à χ; s l'arc AA_1. Nous avons

$$v = -\frac{ds}{dt}$$

et, d'après le principe des forces vives,

$$v^2 = 2[f(\chi_0) - f(\chi)];$$

---

[1] Extrait du *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique.*

[2] C'est à M. Puiseux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. IX, 1844) que l'on doit la méthode qui sert de base à la théorie que nous allons exposer; on trouve dans le *Cours de Mécanique* de Sturm, publié en 1868 par M. Prouhet, l'application de cette méthode, mais seulement dans le cas particulier de la pesanteur.

on déduit de ces deux formules la suivante :

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{ds}{\sqrt{f(\chi_0)-f(\chi)}}.$$

Si τ désigne la durée du trajet A_0A_1, nous avons

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\chi_0}^{\chi_1}\frac{\frac{ds}{d\chi}}{\sqrt{f(\chi_0)-f(\chi)}}d\chi$$

ou

(1) $$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\chi_1}^{\chi_0}\frac{\frac{ds}{d\chi}}{\sqrt{f(\chi_0)-f(\chi)}}d\chi.$$

Il nous faut maintenant exprimer que cette durée est indépendante de χ. A cet effet, en désignant par h une constante et par x une nouvelle variable que nous substituerons à χ, nous poserons

(2) $$\begin{cases} f(\chi_0)-f(\chi_1)=h, \\ f(\chi\ )-f(\chi_1)=x, \end{cases}$$

d'où

(3) $$f(\chi_0)-f(\chi)=h-x,$$

avec les conditions

(4) $$x=0 \quad \text{pour} \quad \chi=\chi_1.$$
(4') $$x=h \quad \text{pour} \quad \chi=\chi_0.$$

Lorsque, en général, une courbe est donnée par deux équations entre trois variables, deux de ces variables peuvent s'exprimer au moyen de la troisième, et il en est par suite de même de l'élément d'arc. Nous pourrons donc poser .

(5) $$ds=\varphi(x)dx,$$

et la formule (1), eu égard à la relation (3), devient

(6) $$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int^{h}\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{h-x}}.$$

Remplaçons maintenant x par une nouvelle variable u définie par la relation

$$(7) \qquad x = uh.$$

En remarquant que $u = 1$ pour $x = h$, l'équation (6) devient

$$(8) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\varphi(uh)\sqrt{h}\,du}{\sqrt{1-u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \varphi(uh)\sqrt{uh}\,\frac{du}{\sqrt{(1-u)u}}.$$

Or, comme c'est la valeur de h qui définit la position du point de départ, il nous reste à exprimer que $\frac{d\tau}{dh} = 0$, ou que

$$\int_0^1 \left[\varphi'(uh)\sqrt{uh} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(uh)}{\sqrt{uh}}\right] \frac{u\,du}{\sqrt{u(1-u)}} = 0.$$

Mais, si l'on attribue à h une valeur suffisamment petite, tous les éléments de cette intégrale seraient de même signe et leur somme ne serait pas nulle. Il faut donc que chacun d'eux soit nul ou que l'on ait

$$\varphi'(uh)\sqrt{uh} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(uh)}{\sqrt{uh}} = 0$$

ou

$$\varphi'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

ou encore

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x},$$

d'où, en intégrant et désignant par C une constante,

$$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

La formule (5) devient alors

$$ds = \varphi(x)\,dx = C\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Si l'on remarque que $s = 0$ pour $x = 0$ ou pour $\chi = \chi_1$, on trouve, en intégrant,

$$s = 2C\sqrt{x}$$

ou

$$(9)\qquad s = 2C\sqrt{f(\chi) - f(\chi_1)}.$$

On déduit de là

$$(10)\qquad ds = C\frac{f'(\chi)d\chi}{\sqrt{f(\chi) - f(\chi_1)}}$$

ou

$$(11)\qquad ds = 2C^2\frac{f'(\chi)d\chi}{s}.$$

Si F_t désigne la composante tangentielle de la forme extérieure, on a, en se rappelant que ds est négatif,

$$-F_t ds = -f'(\chi)d\chi,$$

d'où, en vertu de la formule (11),

$$F_t = f'(\chi)\frac{d\chi}{ds} = \frac{s}{2C}.$$

Mais on sait que

$$F_t = -\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Nous avons donc finalement l'équation

$$(12)\qquad \frac{d^2 s}{dt^3} = -\frac{s}{2C^2},$$

qui n'est autre chose que celle du mouvement du pendule lorsque l'amplitude de ses oscillations est très petite. Il est donc inutile de remonter à l'équation (8) pour avoir la valeur de τ, qui est la suivante :

$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{2C^2} = \frac{\pi C}{\sqrt{2}}.$$

L'équation (10) est l'équation générale des tautochrones dans le cas spécial dont nous venons de nous occuper.

Mais ds s'exprime généralement au moyen des différentielles de trois variables, dont l'une sera χ si l'on veut et dont nous représenterons par z et ζ les deux autres. Le problème est donc indéterminé, puisqu'il faut pour le résoudre se donner une relation entre les trois variables. On voit ainsi que, dans le cas d'un potentiel d'une seule variable, il y aura une infinité de tautochrones dont une au moins sera plane.

2. *Tautochrone dans le cas de la pesanteur.* — Soient z la hauteur du mobile au-dessus du point d'arrivée; on a

$$z = \chi, \quad f(\chi) = gz, \quad f(\chi_1) = f(0) = 0,$$

et la formule (9) donne

$$s = 2C\sqrt{gz}.$$

Si la courbe est comprise dans un plan vertical, elle sera, d'après cette équation, une cycloïde dont la base est horizontale. En enroulant le plan de la cycloïde sur un cylindre vertical quelconque, la courbe résultante sera toujours une tautochrone. On voit ainsi qu'il n'y a qu'une seule tautochrone plane, mais qu'il y a une infinité de tautochrones à double courbure.

Si le mobile est assujetti à rester sur un plan fixe, incliné de l'angle i sur l'horizon, la tautochrone sera encore une cycloïde; puisque, dans ce cas, il est soumis à l'action d'une force, $g \sin i$, dont la direction est constante.

3. *Tautochrone plane dans le cas d'une force attractive émanant d'un centre fixe et proportionnelle à la distance à ce centre.* La distance r du mobile au centre fixe O devra être substituée à la variable générale χ, et il est évident que la fonction $f(r)$ sera proportionnelle à r^2.

L'équation (9) peut donc, en désignant par K une constante, se mettre sous la forme

$$(12) \qquad s = K\sqrt{r^2 - r_1^2}.$$

De cette équation on déduit la suivante

$$(13) \qquad \frac{r\,dr}{ds} = \frac{1}{K}\sqrt{r^2 - r_1^2}$$

dont le premier membre représente la sous-normale polaire.

Si θ désigne l'angle formé par r avec un axe fixe Ox partant de l'origine O, on a

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{\frac{r^2\,d\theta^2}{dr^2} + 1},$$

et la formule précédente donne

$$(14) \qquad d\theta = \pm\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{r_1^2 + r^2(K^2 - 1)}{r^2 - r_1^2}},$$

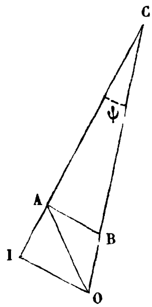
en prenant le signe + ou le signe — selon que r croît ou décroît. Sans nous arrêter à discuter cette dernière formule, nous nous bornerons à faire remarquer que, si 1° $K^2 < 1$, le rayon r est limité et la courbe est comprise entre deux cercles de centre O ayant pour rayons r_1 et $\frac{r_1}{1 - k^2}$; 2° $K^2 = 1$, le lieu se réduit à une droite et l'on retrouve ainsi une propriété connue; 3° $K^2 > 1$, le rayon vecteur r croît indéfiniment et θ devient infini avec lui; la courbe est alors une spirale formée de deux branches symétriques qui s'éloignent indéfiniment du centre d'attraction. Si dans cette dernière hypothèse r_1 est nul, on a, en désignant par M une constante,

$$r = Me^{\pm\frac{\theta}{\sqrt{k^2-1}}},$$

équation d'une spirale logarithmique dont l'origine est le point d'arrivée.

Revenons maintenant à l'interprétation géométrique, que nous avons donnée plus haut, de la formule (13). Soient A (*fig.* 1) un point quelconque de la tauto-

Fig. 1.



chrone; r son rayon vecteur OA; AI la normale en ce point; OI la sous-normale polaire. La formule précitée revient à la suivante

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{K.OI} = \sqrt{r^2 - r_1^2}.$$

Décrivons du point O comme centre, avec un rayon quelconque R′, une circonférence qui viendra couper en C la direction de AI et désignons par ψ l'angle ACO. La formule (15) se transforme dans la suivante :

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{KR}' \sin\psi = \sqrt{r^2 - r_1^2},$$

d'après laquelle on voit que l'on doit avoir $\psi = 0$ pour $r = r_1$.

Supposons que le lieu des points A soit la trajectoire d'un point déterminé du plan d'une courbe qui roule sur la circonférence de rayon R′: pour la position A du point décrivant, le contact aura lieu en C. Soit $\rho =$ AC le rayon vecteur de la courbe roulante rapportée au pôle relativement fixe A; on a

$$r^2 = p^2 + R'^2 - 2R'p\cos\psi,$$

par suite

$$r_1^2 = p_1^2 + R'^2 - 2R'p_1,$$

en désignant par p_1 la valeur de p correspondant à $r = r_1$ ou à $\psi = 0$. Nous avons ainsi

$$r^2 - r_1^2 = p^2 - p_1^2 - 2R'(p\cos\psi - p_1).$$

Portant cette valeur dans l'équation (16) et résolvant par rapport à $\cos\psi$, on trouve

$$(17)\qquad \cos\psi = \frac{p \pm \sqrt{p^2(1-K^2) + (p_1^2 - 2R'p_1 + K^2R'^2)K^2}}{K^2R'}.$$

Admettons qu'il soit possible de profiter de l'indétermination de R' pour annuler le second terme sous le radical; nous aurons

$$(18)\qquad R' = \frac{p_1}{K^2}\left(1 \pm \sqrt{1-K^2}\right),$$

ce qui exige que $K \leqq 1$; en admettant qu'il en soit ainsi, la formule (17) se réduit à la suivante

$$(19)\qquad \cos\psi = \frac{p}{K^2R'}\left(1 \pm \sqrt{1-K^2}\right).$$

Pour que l'on ait $\cos\psi = 1$ pour $p = p_1$, il faut que les mêmes signes se correspondent dans les deux équations (18) et (19), et alors cette dernière devient

$$(20)\qquad \cos\psi = \frac{p}{p_1}.$$

On voit ainsi que A se trouve sur une circonférence décrite sur $CB = p_1$ comme diamètre. Le lieu de A sera donc l'une ou l'autre des deux hypocycloïdes, engendrées par un point de la circonférence ci-dessus roulant sur les circonférences ayant O pour centre et pour rayons les racines de l'équation (18). La première de ces racines est supérieure à p_1, la seconde lui est inférieure, comme on le reconnaît en la mettant sous la forme

$$R' = \frac{p_1}{1+\sqrt{1-K^2}}.$$

Si $K=1$, on a $R'=p_1$; les deux circonférences fixes se confondent en une seule et il est visible que le lieu du point A se réduit à la droite de de Lahire.

Considérons maintenant le cas où K est supérieur à l'unité et déterminons R' de manière à rendre minimum le second terme sous le radical de l'équation (17).

Nous trouvons ainsi

$$(21) \qquad R' = \frac{p_1}{K^2},$$

$$(22) \qquad \cos\psi = \frac{p \pm \sqrt{(K^2-1)(p_1^2-p^2)}}{p_1}.$$

La dernière de ces formules peut s'exprimer ainsi

$$(23) \qquad \cos\psi = x \pm \lambda\sqrt{1-x^2},$$

en posant

$$\frac{p}{p_1} = x, \quad \sqrt{K^2-1} = \lambda,$$

et l'on en déduit

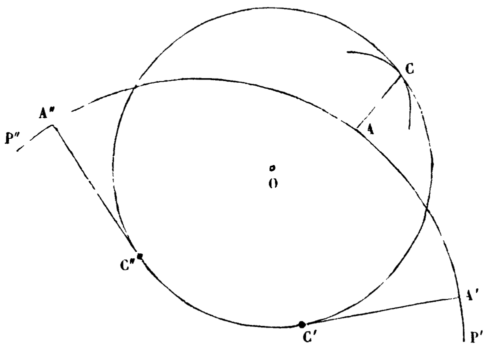
$$d\cos\psi = \left(1 \mp \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

Or, à partir de $x=1$, dx est négatif; $\cos\psi$, qui était égal à l'unité, doit décroître; le signe supérieur du radical dans les formules (22) et (23) doit donc ainsi être rejeté.

Quoi qu'il en soit, on voit que p et, par suite, la courbe roulante seraient limitées, tandis que nous avons vu plus haut que, pour $K>1$, le lieu de A était illimité, ce qui paraît paradoxal.

Mais nous ferons remarquer que le mode de génération du lieu $P'P''$ (*fig.* 2) de A, par le roulement d'une courbe sur la circonférence O de rayon R', n'est réalisable que pour une partie limitée de ce lieu. On voit en effet que le contact de roulement C est déterminé par

Fig. 2.



l'intersection de la circonférence ci-dessus avec la normale en A à $P'P''$. Soient A', A" les positions de A pour lesquelles les normales à $P'P''$ sont tangentes en C', C" à la circonférence. Il peut arriver que les normales menées en dehors de $A'A''$ ne rencontrent plus cette circonférence, et alors le mode de description admis du lieu de A ne sera plus admissible pour $A'P'$ et $A''P''$, et c'est ce qu'il fallait expliquer.

4. *Tautochrone plane dans le cas d'une force répulsive émanant d'un centre fixe et proportionnelle à la distance de ce centre.* — Il est évident (*fig.* 3) qu'au lieu des formules (12) et (13), (16), nous avons les suivantes :

(24) $$s = K\sqrt{r_1^2 - r^2},$$

(25) $$\frac{r\,dr}{ds} = -\frac{1}{K}\sqrt{r_1^2 - r^2},$$

(26) $$KR'\sin\psi = \sqrt{r_1^2 - r^2}.$$

De plus, on voit que

$$r^2 = p^2 + R'^2 + 2R'p\cos\psi,$$
$$r_1^2 = p_1^2 + R'^2 + 2R'p_1;$$

alors l'équation (26) donne

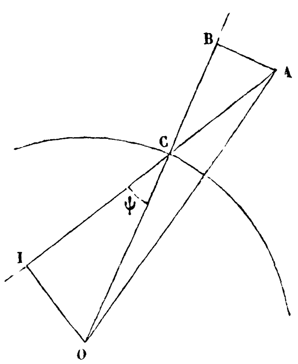
$$(27)\quad \cos\psi = \frac{p \pm \sqrt{p^2(1+K^2) - (p_1^2 + R'p_1 - K^2R'^2)K^2}}{K^2R'}.$$

En égalant à zéro le second terme sous le radical, on trouve

$$R' = \frac{p_1}{K^2}\left(1 + \sqrt{1+K^2}\right),$$

en supprimant la racine négative qui n'a aucune signi-

Fig. 3.



fication, et la formule (27) donne, en se rappelant que l'on doit avoir $\psi = 0$, pour $p = p_1$,

$$\cos\psi = \frac{p}{p_1}.$$

On voit donc que dans tous les cas la tautochrone sera une épicycloïde décrite par un point de la circonférence ayant p_1 pour diamètre roulant sur la circonférence fixe de rayon R'.

5. *Tautochrone dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.* — Si nous conservons les notations du n° 1, et si nous désignons par k le coefficient de résistance du milieu, le principe des forces vives donne

$$\frac{1}{2}\,dv^2 = -\,df(\chi) + kv^2\,ds,$$

en se rappelant que ds est négatif. On tire de là

$$\frac{dv^2}{ds} - 2kv^2 + \frac{2\,df(\chi)}{ds} = 0,$$

équation linéaire en v^2 dont l'intégrale est

$$v^2 = -\,2e^{2ks}\int_{\chi_0}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi) = \frac{ds^2}{dt^2},$$

d'où

$$dt = -\frac{e^{-ks}\,ds}{\sqrt{-2\displaystyle\int_{\chi_0}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi)}}$$

et

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\chi_1}^{\chi_0}\frac{e^{-ks}\,ds}{\sqrt{-\displaystyle\int_{\chi_0}^{\chi_0} e^{-2ks}\,df(\chi)}}. \tag{28}$$

Nous remarquerons que l'on a

$$\int_{\chi_0}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi) = \int_{\chi_0}^{\chi_1} e^{-2ks}\,df(\chi) + \int_{\chi_1}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi).$$

Posons

$$-h = \int_{\chi_0}^{\chi_1} e^{-2ks}\,df(\chi), \quad x = \int_{\chi_1}^{\chi} e^{-2ks}\,df(\chi), \tag{29}$$
$$e^{-ks}\,ds = \varphi(x)\,dx,$$

x étant une variable que nous substituerons à χ; nous aurons $x = 0$ pour $\chi = \chi_1$ et $x = h$ pour $\chi = \chi_0$. L'équation (28) devient

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^h \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{h-x}} \tag{30}$$

et prend ainsi la même forme que lorsqu'il n'existe pas de milieu. On est donc conduit à poser, en désignant par C une constante,

$$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} \tag{31}$$

ou

$$e^{ks}\,ds = \frac{C\,dx}{\sqrt{x}}.$$

Comme on a $s = 0$ pour $\chi = \chi_1$ ou pour $x = 0$, il vient, en intégrant,

$$-\frac{1}{k}(e^{-2ks} - 1) = 2C\sqrt{x}.$$

En élevant au carré et remplaçant x par sa valeur (29), on trouve

$$\frac{1}{4k^2C^2}(e^{-ks} - 2e^{-ks} + 1) = \int_{\chi_1}^{\chi} e^{2ks}\,df(\chi).$$

Si nous différentions, nous trouvons

$$\frac{1}{2k^2C}(-1 + e^{ks})\,ds = df(\chi).$$

En intégrant maintenant et remarquant que $s = 0$ pour $\chi = \chi_1$, il vient

$$\frac{1}{2KC^2}\left(-s + \frac{e^{ks} - 1}{k}\right) = f(\chi) - f(\chi_1)$$

pour l'équation générale des tautochrones.

On remarquera que τ a la même valeur que dans le vide, en vertu de la formule (16) et de l'expression (17) de la fonction $\varphi(x)$, et il est facile de démontrer que la composante tangentielle de la force

$$-f'(\chi)\frac{d\chi}{ds} - kv^2$$

est proportionnelle à s.