NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1882

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 464-469

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__464_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE EN 1882

(voir 3ᵉ serie, t. I, p. 413);

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

1. *Étant donnés un cercle de rayon r et un point* A *dans son plan, à une distance d du centre, on suppose menée par le point* A *une sécante telle que la somme des carrés des segments compris entre ce point et les points d'intersection avec la circonférence soit égale à un carré donné m^2.*

Démontrer que, si α désigne l'angle que la sécante fait avec le diamètre passant par le point A, *on aura la formule*

$$\cos 2\alpha = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2}. \tag{1}$$

Discussion. — *Limites de m quand on fait varier α, le point* A *étant supposé à l'intérieur du cercle.*

Soient B et C les points d'intersection de la sécante avec la circonférence de centre O.

La relation entre les trois côtés et un angle d'un triangle, appliquée aux triangles AOB, AOC, donne

$$r^2 = \overline{AB}^2 + d^2 - 2\,AB\,.\,d\cos\alpha,$$
$$r^2 = \overline{AC}^2 + d^2 - 2\,AC\,.\,d\cos\alpha;$$

d'où, en ajoutant,

$$2r^2 = m^2 + 2d^2 - 2(AB + AC)d\cos\alpha.$$

Abaissant OI perpendiculaire sur la corde BC, on a

$$AI = \frac{AB + AC}{2} = d\cos\alpha,$$

d'où

$$AB + AC = 2d\cos\alpha$$

Substituant cette valeur dans la relation précédente, il vient

$$2r^2 = m^2 + 2d^2 - 4d^2\cos^2\alpha,$$

d'où

$$2\cos^2\alpha = \frac{m^2 - 2d^2 - 2r^2}{2d^2},$$

(1) $$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2}\ (^1).$$

CALCUL LOGARITHMIQUE.

2. *La formule* (1) *étant admise, calculer l'angle* α *à* 0'',1 *près, en supposant* 1° *la distance d égale au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison, et m égal au double de la moyenne proportionnelle entre r et d.*

---

(1) Les limites de m sont évidemment $\sqrt{2r^2 + 2d^2}$, $\sqrt{2r^2 - 2d^2}$.

2° $d = \frac{2}{3}r$, et $m = d\sqrt{3}$.

1° $$d = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad 2d^2 = r^2(3 - \sqrt{5}),$$

$$m^2 = 4dr = 2r^2(\sqrt{5} - 1),$$

$$\cos 2\alpha = \frac{2(\sqrt{5} - 2)}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 2)(3 + \sqrt{5})}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 2 \sin 18^\circ.$$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,3010300 \\
\log \sin 18^\circ &= \bar{1},4899824 \\
\log \cos 2\alpha &= \bar{1},7910124 \\
&\quad 345 \quad 51^\circ 49' 30'' \\
&\quad 221 \qquad\quad 8'',2 \\
2\alpha &= 51^\circ 49' 38'',2 \\
\alpha &= 25^\circ 54' 49'',1.
\end{aligned}$$

2° $$d^2 = \frac{4}{9}r^2, \quad m^2 = 3d^2 = \frac{4}{3}r^2,$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}r^2 : \frac{8}{9}r^2 = -\frac{3}{4} = -0,75.$$

$$\begin{aligned}
\log \cos(180^\circ - 2\alpha) &= \bar{1},8750613 \\
&\quad 699 \quad 41^\circ 24' 30'' \\
&\quad 86 \qquad\quad 4'',6 \\
180^\circ - 2\alpha &= 41^\circ 24' 34'',6 \\
90^\circ - \alpha &= 20^\circ 42' 17'',3 \\
\alpha &= 69^\circ 17' 42'',7.
\end{aligned}$$

3. *On connaît, dans un triangle* ABC, *deux côtés* b, c, *et l'on sait que ce triangle est équivalent au triangle équilatéral construit sur le troisième côté* a. *Calculer ce côté et l'angle* A.

(*On établira les deux équations propres à déterminer chaque inconnue indépendamment de l'autre, et l'on montrera la concordance des résultats que fournit leur discussion.*)

s désignant la surface du triangle, on a, par des formules connues,

$$s^2 = \frac{3a^4}{16} = \frac{2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16},$$

d'où

$$4a^4 - 2(b^2+c^2)a^2 + (b^2-c^2)^2 = 0,$$

$$a^2 = \frac{(b^2+c^2) \pm \sqrt{(b^2+c^2)^2 - 4(b^2-c^2)^2}}{4}$$

ou

$$a^2 = \frac{b^2+c^2 \pm \sqrt{(3b^2-c^2)(3c^2-b^2)}}{4}.$$

Pour que le triangle soit possible, il faut d'abord qu'on ait

$$\frac{c^2}{3} < b^2 < 3c^2$$

ou

$$10b^2c^2 - 3b^4 - 3c^4 > 0.$$

Quand cette condition est remplie, le problème admet deux solutions, si b est différent de c.

En effet, la plus grande des deux valeurs de a^2 est évidemment inférieure à $(b+c)^2$, et la plus petite est supérieure à $(b-c)^2$; car on a

$$b^2+c^2 - \sqrt{(b^2+c^2)^2 - 4(b^2-c^2)} > 4(b^2+c^2) - 8bc,$$

$$\sqrt{(b^2+c^2)^2 - 4(b^2-c^2)^2} < 8bc - 3(b^2+c^2) \quad (^1),$$

ou, en élevant au carré, et passant tous les termes dans un même membre,

$$8(b^2+c^2)^2 + 4(b^2-c^2)^2 - 48bc(b^2+c^2) + 64b^2c^2 > 0,$$

$$12(b-c)^4 > 0,$$

relation évidente si b est différent de c.

Lorsque $b=c$, on a $a^2 = b^2$, $a = b = c$; il n'y a plus qu'un triangle, qui est équilatéral.

Calculons maintenant l'angle A.

---

(1) Le second membre, $8bc - 3(b^2+c^2) = 2bc - 3(b-c)^2$, est une quantité positive si $c > \frac{b}{\sqrt{3}}$, $b > c$.

On a

$$s = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = bc\sin A,$$

d'où

$$a^2 = \frac{2bc\sin A}{\sqrt{3}}$$

et

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Égalant ces deux valeurs de a^2, il vient, en divisant par $4bc$,

$$\frac{1}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A = \frac{(b^2+c^2)\sqrt{3}}{4bc},$$

ou, en remarquant que $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$,

$$\sin(A + 60^\circ) = \frac{(b^2+c^2)\sqrt{3}}{4bc}.$$

Pour que le triangle soit possible, il faut que l'on ait

$$\frac{3(b^2+c^2)^2}{16b^2c^2} < 1$$

ou

$$3b^4 + 3c^4 - 10b^2c^2 < 0,$$

condition identique à celle qui a été trouvée plus haut. Si elle est remplie, en appelant θ le plus petit angle ayant pour sinus $\frac{(b^2+c^2)\sqrt{3}}{4bc}$, on aura

$$\sin\theta = \frac{b^2+c^2}{2bc}\sin 60^\circ > \sin 60^\circ, \quad \text{si } b < c,$$

d'où

$$\theta > 60^\circ,$$
$$A = \theta - 60^\circ,$$
$$A = 180^\circ - \theta - 60^\circ;$$

il y a deux triangles satisfaisant à la question. Si $b = c$, on a

$$\theta = 60^\circ,$$

et simplement

$$A = 60°;$$

il n'y a qu'un triangle, qui est équilatéral.

Ce sont les résultats obtenus dans la première discussion.