NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BARISIEN

Concours d'admission à l'École centrale (seconde session, 1882)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 415-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__415_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(SECONDE SESSION, 1882)

(voir même Tome, p. 92),

SOLUTION DE M. E. BARISIEN,

Lieutenant au 141e d'infanterie, à Dra-el-Mizan.

On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires OX, OY *et deux points* H *et* H', *le premier défini par ses coordonnées* a, b; *le second symétrique du premier par rapport au point* O.

Par ce dernier point, on mène une droite indéfinie

DOE *formant avec l'axe* OX *un angle* DOX $= \theta$; *on projette les points* H, H' *sur cette droite en* h, h'.

On projette le point h *en* u *sur l'axe* OX, *et le point* u *en* u_1 *sur la droite* DOE.

On projette le point h' *en* v *sur l'axe* OY *et le point* v *en* v_1 *sur la droite* DOE.

(*Toutes ces projections sont orthogonales.*)

Enfin, sur la longueur $u_1 v_1$ *comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle* $u_1 v_1$S, *en menant* v_1S *parallèle à* OX *et* u_1S *parallèle à* OY (¹).

Cela posé, on demande :

1° *De trouver les coordonnées du point* S *en fonction des trois constantes* a, b, θ;

2° *D'écrire l'équation d'une parabole ayant le point* S *pour sommet et la droite* DOE *pour directrice*;

3° *De démontrer que le lieu des foyers de toutes les paraboles obtenues en faisant varier l'angle* θ *se compose du système de deux circonférences de cercle*;

4° *De démontrer que toutes ces paraboles sont tangentes aux axes de coordonnées;*

5° *De démontrer que les cordes de leurs contacts avec ces axes se croisent toutes en un même point.*

1° Soient α et β les coordonnées x, y du point S, et K la projection du point H sur l'axe OX.

Si nous projetons sur OD le contour OKHhO, il viendra, en posant O$h = r$,

$$r = a\cos\theta - b\sin\theta.$$

D'autre part,

$$\alpha = \mathrm{O}u_1\cos\theta,$$

$$\mathrm{O}u_1 = \mathrm{O}u\cos\theta = r\cos^2\theta,$$

$$\mathrm{O}u = \mathrm{O}h\cos\theta = r\cos\theta,$$

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où

$$(1)\qquad \alpha = r\cos^3\theta.$$

De même

$$6 = -\,\mathrm{O}v_1 \sin\theta = -\,\mathrm{O}v \sin^2\theta,$$

$$(2)\qquad 6 = -\,r\sin^3\theta.$$

En remplaçant dans les égalités (1) et (2) r par sa valeur

$$a\cos\theta + b\sin\theta,$$

on aura les coordonnées α, β du point S, en fonction des trois constantes a, b, θ.

2° Menons du point S la perpendiculaire $\mathrm{S}i$ à la droite DOE. La perpendiculaire $\mathrm{S}i$ sera l'axe de la parabole dont S est le sommet, et DOE la directrice. Le foyer F de la parabole s'obtiendra, en prenant sur le prolongement de l'axe $i\mathrm{S}$, à partir du sommet S, $\mathrm{SF} = \mathrm{S}i$.

Soient x, y les coordonnées de i, et X, Y les coordonnées de F.

On aura

$$x = \mathrm{O}i\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \mathrm{O}i\sin\theta.$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathrm{O}i &= \mathrm{O}u_1 - u_1 i \\ &= r\cos^2\theta - u_1\mathrm{S}.\sin\theta = r\cos^2\theta - r(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta)\sin\theta, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{O}i = r\cos^2\theta - r\sin^2\theta = r\cos 2\theta.$$

Donc

$$(3)\qquad x = r\cos 2\theta\cos\theta,$$

$$(4)\qquad y = r\cos 2\theta\sin\theta.$$

Pour déterminer X et Y, nous avons les relations

$$2\alpha = \mathrm{X} + x, \quad 2\beta = \mathrm{Y} + y;$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= 2\alpha - x = 2r\cos^3\theta - r\cos 2\theta\cos\theta, \\ \mathrm{Y} &= 26 - y = -2r\sin^3\theta - r\cos 2\theta\sin\theta, \end{aligned}$$

ou

$$(5)\qquad X = r\cos\theta$$

et

$$(6)\qquad Y = -r\sin\theta.$$

Ces dernières relations font voir que le point F est le symétrique de h, par rapport à OX ([1]).

On aura l'équation de la parabole, en exprimant que les distances d'un point quelconque de cette courbe, au foyer F et à la directrice DOE, sont égales entre elles.

L'équation de la directrice DOE étant

$$y\cos\theta - x\sin\theta = 0,$$

l'équation de la parabole est

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2$$

ou

$$(x - r\cos\theta)^2 + (y + r\sin\theta)^2 = (y\cos\theta - x\sin\theta)^2,$$

ou bien encore

$$(7)\qquad (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 - 2r(x\cos\theta - y\sin\theta) + r^2 = 0,$$

équation dans laquelle

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta.$$

3° Pour avoir l'équation du lieu des foyers, il faut

([1]) C'est aussi ce que montre la Géométrie élémentaire, car de l'égalité supposée $OH' = OH$ résulte évidemment

$$Oh' = Oh,\quad Ov = hu,\quad vv_1 = uu_1,\quad vu = v_1u_1 = Oh.$$

Les triangles rectangles u_1v_1S, hOu, étant égaux, $u_1S = hu$, la droite uS est parallèle à hu_1, le point S est sur la droite uv.

En outre, $SF = Si = vv_1$. Donc vF est égale et parallèle à $v_1S = Ou$, par conséquent Fu est perpendiculaire à OX, et de plus égale à uh. C'est-à-dire que F est le symétrique de h, par rapport à OX.

(G.)

éliminer θ entre les équations (5) et (6), qui donnent, en remplaçant r par sa valeur $a\cos\theta + b\sin\theta$:

$$X = (a\cos\theta + b\sin\theta)\cos\theta,$$
$$Y = -(a\cos\theta + b\sin\theta)\sin\theta,$$
$$X^2 + Y^2 = (a\cos\theta + b\sin\theta)^2,$$

et

$$\frac{\sin\theta}{-Y} = \frac{\cos\theta}{X} = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta}{aX - bY}.$$

D'où

$$X^2 + Y^2 = \frac{(aX - bY)^2}{X^2+Y^2};$$
$$(X^2+Y^2)^2 - (aX - bY)^2 = 0;$$
$$(X^2+Y^2 - aX + bY)(X^2+Y^2+aX-bY) = 0.$$

Le lieu se compose du système des deux circonférences égales, représentées par les équations

$$X^2 + Y^2 - aX + bY = 0,$$

et

$$X^2 + Y^2 + aX - bY = 0.$$

4° En faisant $y = 0$ dans l'équation (7), on obtient

$$(x\cos\theta - r)^2 = 0,$$

ce qui montre que la parabole est tangente à l'axe des x, au point

$$y = 0, \quad x = \frac{r}{\cos\theta}.$$

De même la parabole est tangente à l'axe des y au point

$$x = 0, \quad y = -\frac{r}{\sin\theta}.$$

5° L'équation de la corde des contacts de la parabole avec les axes est

$$\frac{x}{\frac{r}{\cos\theta}} - \frac{y}{\frac{r}{\sin\theta}} = 1,$$

ou

$$x\cos\theta - y\sin\theta = r = a\cos\theta + b\sin\theta,$$

qui peut s'écrire

$$(x - a)\cos\theta - (y + b)\sin\theta = 0.$$

Sous cette forme, on voit que la droite de contact passe par le point fixe $x = a$, $y = -b$, qui est le point symétrique de H par rapport à l'axe OX.

Note. — La question de Géométrie analytique du Concours d'admission à l'Ecole Centrale (première session 1882), a de même été résolue par M. Barisien; c'est par oubli que sa solution n'a pas été mentionnée dans le numéro de juillet dernier.